

DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE AL PRIMO

$$f(x) = \lg(x), x > 0$$

$$\text{Es: } f'(x) = \frac{1}{x}, x > 0$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f : I \rightarrow \mathfrak{R}, I \text{ intervallo, } x_0 \in I$$

$$\exists f'(x) : I \rightarrow \mathfrak{R}$$

$$f''(x) : \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \text{ derivata seconda di } f \text{ in } x_0$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0), D^2 f(x_0), d^2 f(x_0)$$

Funzione derivata II: è una funzione che ha come dominio il sottoinsieme di I in cui è definita la derivata II e come valore il corrispondente valore della derivata seconda.

$$f, f', f'', \dots, f^{(n-1)} : I \rightarrow \mathfrak{R}, I \text{ intervallo, } x_0 \in I$$

Derivata n-esima di f in x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$$

$$\text{Es: } f(x) = e^x \quad x \in \mathfrak{R}$$

$$f'(x) = e^x$$

$$f''(x) = e^x$$

⋮

$$f^n(x) = e^x$$

Funzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \mathfrak{R}$ è derivabile e la sua derivata dà sempre $f(x)$.

Es:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x + 5$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 6$$

$$f''(x) = 6x - 4 \quad x \in \mathfrak{R} \text{ Polinomio di grado } n \text{ la cui derivata è sempre di grado inferiore.}$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f^{(IV)}(x) = 0$$

$$f^{(V)}(x) = f^{(VI)}(x) = \dots = f^{(n)}(x) = 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathfrak{R} +$$

La derivata (n+1)-esima è 0 e le derivate successive sono tutte nulle.

$$f(x) = \cos(x)$$

$$f'(x) = -\sin(x)$$

$$\text{Es: } f''(x) = -\cos(x) \quad x \in \mathfrak{R}$$

$$f'''(x) = \sin(x)$$

$$f^{(IV)}(x) = \cos(x)$$

$$g(x) = \sin(x)$$

$$g'(x) = \cos(x)$$

$$g''(x) = -\sin(x) \quad x \in \mathfrak{R}$$

$$g'''(x) = -\cos(x)$$

$$g^{(IV)}(x) = \sin(x)$$

$$f(x) = \cos(x)$$

$$\frac{d^n \cos(x)}{dx^n} = \begin{cases} (-1)^n \cos(x), n = 2h, \forall x \in \mathfrak{R} \\ (-1)^{n+1} \sin(x), n = 2h+1, h \in \mathfrak{N}, h \geq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \sin(x)$$

$$\frac{d^n \sin(x)}{dx^n} = \begin{cases} (-1)^n \cos(x), n = 2h+1, \forall x \in \mathfrak{R} \\ (-1)^n \sin(x), n = 2h, h \in \mathfrak{N}, h \geq 0 \end{cases}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{funzione coseno iperbolico, } x \in \mathfrak{R}, \text{ funzione pari: } f(-x) = f(x)$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{funzione seno iperbolico, } x \in \mathfrak{R}, \text{ funzione dispari: } f(x) = -f(-x)$$

$$\frac{d}{dx} \cosh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \cosh(x) = \frac{d}{dx} \sinh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

$$\frac{d^n}{dx^n} \cosh(x) = \begin{cases} \sinh(x), n \text{ _ dispari}, \forall x \in \mathfrak{R} \\ \cosh(x), n \text{ _ pari} \end{cases}$$

$$\frac{d^n}{dx^n} \sinh(x) = \begin{cases} \cosh(x), n \text{ _ dispari}, \forall x \in \mathfrak{R} \\ \sinh(x), n \text{ _ pari} \end{cases}$$

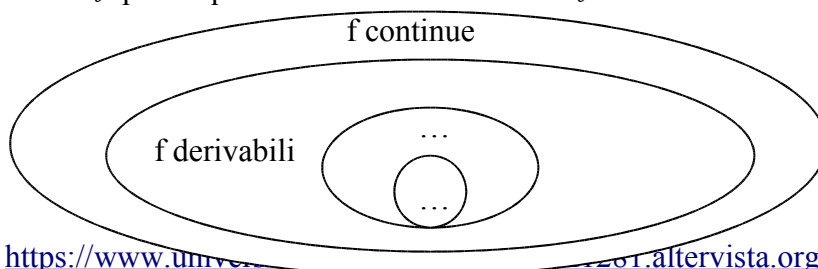
$$f(x) = |x|, x \in \mathfrak{R}, x \neq 0$$

$$f'(x) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} +1, x > 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = 0, x \neq 0$$

CLASSI DI FUNZIONI

Funzioni continue $\supset f$ per le quali esiste una derivata $I \supset f$ che hanno derivata I e f' continua.



$$C^{(k)}(I, \mathfrak{R}) = \{f, I \rightarrow \mathfrak{R} \text{ derivabili } k \text{ volte e } f^{(k)}(x) \text{ è continua in } I\} \quad k \in \mathbb{N}$$

Proprietà

Se $k = 0$ $C^{(0)}(I, \mathfrak{R}) =$ insieme delle funzioni continue in I a valori in \mathfrak{R} . La classe delle funzioni continue (es. $|x|, e^x$).

Se $k = 1$ $C^{(1)}(I, \mathfrak{R}) =$ insieme delle funzioni derivabili in I , tali che $f'(x)$ è continua in I .

Se $k = 2$ $C^{(2)}(I, \mathfrak{R}) =$ insieme delle funzioni derivabili 2 volte in I e tali che la seconda derivata in x è continua in I .

f continua, derivabile
 f' continua, derivabile
 f'' continua

Nella classe mettiamo sempre il domino, perché è fondamentale.

Es: $\lg(x) \in C^k(]0; +\infty[, \mathfrak{R}), \forall k \geq 0$

polinomi, $e^x, \cos(x), \sin(x), \cosh(x), \sinh(x) \in C^k(\mathfrak{R}; \mathfrak{R}), \forall k \geq 0$

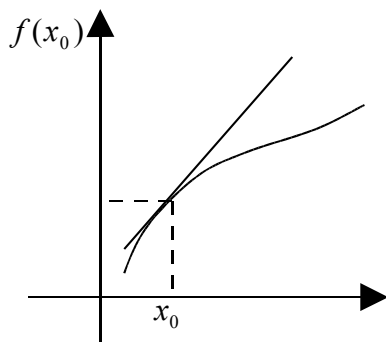
$|x| \in C^0(\mathfrak{R}; \mathfrak{R})$

$|x| \in C^k(]0; +\infty[; \mathfrak{R}), |x| \in C^k(]-\infty; 0[; \mathfrak{R})$

$$C^{(0)}(I; \mathfrak{R}) \supset C^{(1)}(I; \mathfrak{R}) \supset C^{(2)}(I; \mathfrak{R}) \supset \dots \supset C^{(n-1)}(I; \mathfrak{R}) \supset C^{(n)}(I; \mathfrak{R}) \supset \dots, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$C^{(\infty)}(I; \mathfrak{R}) = \bigcap_{k=0}^{+\infty} C^k(I; \mathfrak{R})$$

Insieme delle funzioni definite in I assieme alle derivate di ogni ordine.



$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

retta tangente al grafico.

Problema di approssimare $f(x)$ con un polinomio di grado n ($x \rightarrow x_0$).

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - y(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = 0$$

Non è solo che $y(x)$ tende a $f(x_0)$ per $x \rightarrow x_0$, ma $y(x)$ tende a $f(x)$, per $x \rightarrow x_0$, più rapidamente di $x - x_0$: questa retta è la migliore approssimazione lineare del nostro grafico.

$$ym(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - ym(x)) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - ym(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m \right] = 0$$

$\Leftrightarrow m = f'(x_0)$ in tutti gli altri casi il limite è un valore diverso da 0.

La retta tangente è quella che approssima meglio di tutte le altre il grafico, perché la tangente è quella che soddisfa il limite.

$y(x)$ è un polinomio $\in C^{(\infty)}$

$$y(x_0) = f(x_0)$$

$$y'(x) = f'(x_0)$$

$$y'(x_0) = f'(x_0)$$

DEFINIZIONE DI POLINOMIO DI TAYLOR DI F DI GRADO MINORE O UGUALE A n E PUNTO INIZIALE $x_0 \in I$

$f: I \rightarrow \mathfrak{R}$ derivabile n volte in $x_0 \in I$.

$$\sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k$$

$T_{n,x_0}(x)$ è il polinomio somma in k da 0 a n di a_k per $(x - x_0)^k$ che soddisfa

$$T_{n,x_0}(x_0) = f(x_0), T_{n,x_0}'(x_0) = f'(x_0), \dots, T_{n,x_0}^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

$$T_{n,x_0}(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n$$

$$T_{n,x_0}(x_0) = f(x_0) = a_0$$

perché $a_1(x_0 - x_0)$ e tutti gli a_n si annullano tranne a_0 .

$$T_{n,x_0}'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$T_{n,x_0}'(x_0) = a_1 = f'(x_0)$$

da ricordare che la derivata di $(x - x_0) = 1$

$$T_{n,x_0}''(x) = 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + \dots + a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (x - x_0)^{n-2}$$

$$T_{n,x_0}''(x_0) = 2a_2 = f''(x_0)$$

$$a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$$

$$T_{n,x_0}'''(x_0) = 3!a_3 = f'''(x_0)$$

$$a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}$$

$$T_{n,x_0}^{(n)}(x_0) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = f^{(n)}(x_0)$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Polinomio univocamente determinato dalla richiesta che il polinomio soddisfi la proprietà e che abbia questa forma.

$$T_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Abbiamo n+1 parametri, cioè abbiamo n+1 coefficienti del polinomio a_0, \dots, a_n

Osservazione: esiste un unico polinomio di Taylor di grado $\leq n$ e punto iniziale x_0

Esempio:

$$f(x) = e^x \quad x_0 = 0 \quad \frac{d^n e^x}{dx^n} = e^x$$

$$\left. \frac{d^n e^x}{dx^n} \right|_{x=0} = 1$$

$$T_{n,0}(x) = e^0 + e^0 \cdot \left(x + \frac{e^0}{2!} x^2 + \dots + \frac{e^0}{n!} x^n \right) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \text{ se prendiamo un } x_0 \text{ qualunque}$$

$$a_k = \frac{e^{x_0}}{k!}$$

$$T_{n,x_0}(x) = e^{x_0} + e^{x_0} \cdot (x-x_0) + \frac{e^{x_0}}{2} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{e^{x_0}}{n!} \cdot (x-x_0)^k$$

Esempio:

$$f(x) = \cosh(x) \quad \frac{d^n \cosh(x)}{dx^n} = \begin{cases} \sinh(x), n \text{ dispari} \\ \cosh(x), n \text{ pari} \end{cases}$$

$$T_{n,x_0}(x) = \cosh(x_0) + \sinh(x_0)(x-x_0) + \frac{\cosh(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{\sinh(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots +$$

$$+ \begin{cases} \frac{\sinh(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, n \text{ dispari} \\ \frac{\cosh(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, n \text{ pari} \end{cases}$$

$$\cosh(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$\sinh(0) = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = 0$$

Osservazione: se $f(x)$ è pari, il polinomio di Taylor di punto iniziale $x_0 = 0$

$$x_0 = 0$$

$$T_{n,0}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2h}}{(2h)!}, h \in \mathbb{Z}, n = 2h, n \text{ _ pari}$$

$$T_{2n+1,0}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2h}}{(2h)!}, n = 2h + 1, n \text{ _ dispari}$$

FORMULA DI TAYLOR $f \in C^{(k)}(I, \mathfrak{R})$

Per approssimare $f(x)$ con un polinomio ($x \rightarrow x_0$), $x_0 \in I$

$$k = 1$$

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y(x_0) = f(x_0)$$

$$y'(x_0) = f'(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - y(x)}{x - x_0} = 0$$

POLINOMIO DI TAYLOR

F derivabile n volte in x_0 (questo significa che $f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ esistono in un intervallo centrato in

x_0 e esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = f^{(n)}(x_0)$)

$T_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ cioè il polinomio di Taylor è l'unico polinomio di grado $\leq n$ tale

che

$$T_{n,x_0}(x_0) = f(x_0)$$

$$T_{n,x_0}'(x_0) = f'(x_0)$$

⋮

$$T_{n,x_0}^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

DIMOSTRARE CHE IL POLINOMIO DI TAYLOR (n) È L'UNICO POLINOMIO CHE APPROSSIMA f(x) ALL'ORDINE n

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_{n,x_0}(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

SIMBOLI DI LANDAU

$$f(x) = o(g(x)) \quad x \rightarrow x_0$$

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$f(x) = x^\alpha, \alpha > 0$$

Esempio: $g(x) = e^x \quad x^\alpha = o(e^x)$
 $(x \rightarrow +\infty)$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$

$\frac{\infty}{\infty}$ e^x è un infinito di ordine superiore a x^α ($x \rightarrow +\infty$), $\forall \alpha$

$$f(x) = 1 - \cos(x)$$

Esempio: $g(x) = x \quad 1 - \cos(x) = o(x)$
 $(x \rightarrow 0)$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$

$\frac{0}{0}$ $1 - \cos(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a x ($x \rightarrow 0$) cioè va a 0 più rapidamente di x .

$$f(x) = \lg(x)$$

Esempio: $g(x) = x^\alpha, \alpha > 0 \quad \lg(x) = o(x^\alpha)$
 $(x \rightarrow +\infty)$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg(x)}{x^\alpha} = 0$

$\lg(x)$ è un infinito di ordine inferiore a x^α ($x \rightarrow +\infty$)

Possiamo quindi riscrivere il polinomio di Taylor con i simboli di Landau.

Teorema (formula di Taylor con il resto di Peano)

$f : I \rightarrow \mathfrak{R}$, I intervallo, $x_0 \in I$, f derivabile n volte in x_0

Allora:

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + o((x-x_0)^n) \quad (x \rightarrow x_0)$$

$$f(x) - T_{n,x_0}(x) = o((x-x_0)^n)$$

Dimostrazione:

$n = 1$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \quad (x \rightarrow x_0)$$

$$\underline{\quad \quad \quad T_{1,x_0}(x) \quad \quad \quad}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)]}{x-x_0} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

$n = 2$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o(x-x_0)^2 \quad (x \rightarrow x_0)$$

$$\underline{\quad \quad \quad T_{2,x_0}(x) \quad \quad \quad}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} = f''(x_0)$$

Applichiamo de l'Hôpital

$$\stackrel{(H)}{=} \lim_{z \rightarrow x_0} \frac{f'(z) - f'(x_0)}{2(z - x_0)}$$

abbiamo ottenuto l'analogo di $n = 1$: si tratta del rapporto incrementale

delle derivate seconde che darà $f''(x)$

Se n è qualunque

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

$(x \rightarrow x_0)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \right]}{(x - x_0)^n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \dots - \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}}{(x - x_0)^n} = \frac{0}{0} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Applichiamo de l'Hôpital n volte fino ad ottenere:

$$\stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{n!(x - x_0)}$$

$$e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

Esempio:

$$e^x \Rightarrow T_{n,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

STIMA QUANTITATIVA DELL'ERRORE

Teorema (formula di Taylor con resto di Lagrange)

$$f \in C^{(n+1)}(I; \mathbb{R}), x_0 \in I$$

$$T_{n,x_0}(x)$$

$\forall x \in I, \exists c$ intermedio a x e x_0 tale che

$$f(x) - T_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

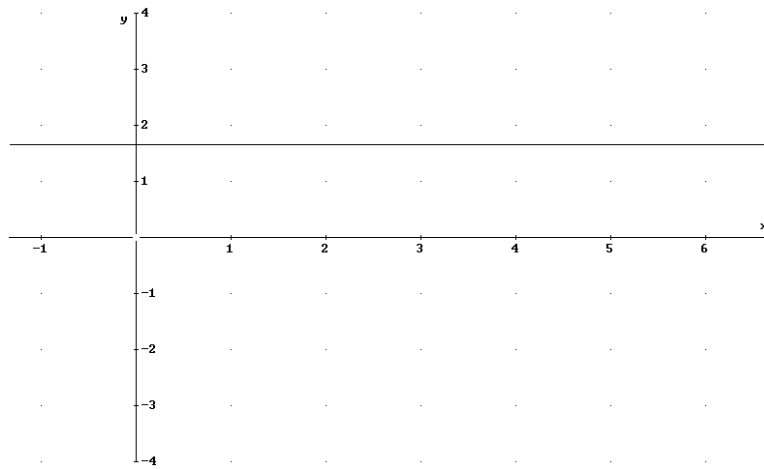
$n = 0$

$$T_{0,x_0}(x) = f(x_0)$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f'(c)}{1!}(x - x_0)$$

Si ottiene semplicemente il teorema del valor medio di Lagrange, il teorema della formula di Taylor con resto di Lagrange è la sua generalizzazione a un ordine qualunque.

$$e^{\frac{1}{2}} - T_{n,0}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^c}{(n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$



$$0 < e < \frac{1}{2}$$

$$e^{\frac{1}{2}} < 3$$

$$L'errore = \left| f\left(\frac{1}{2}\right) - T_{n,0}\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{3}{(n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$n = 2$$

$$T_{n,0}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{13}{8}$$

$$L'errore \leq \frac{3}{3!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16} \text{ cioè lo commettiamo sui decimali.}$$

$$n = 3$$

$$T_{3,0}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{8} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{79}{48}$$

$$L'errore \leq \frac{3}{4!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{24} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{128} \text{ cioè lo commettiamo sui centesimi.}$$

$$n = 4$$

$$L'errore \leq \frac{3}{5!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{3}{60} \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{1280}$$

APPLICAZIONE DELLA FORMULA DI TAYLOR ALLA SOLUZIONE DI FORMULE INDETERMINATE (LIMITI)

SIMBOLI DI LANDAU

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \rightarrow x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\text{Equivalenza: } f(x) \approx g(x) \quad (x \rightarrow x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

$$\text{Es: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \Leftrightarrow e^x - 1 \approx x \quad (x \rightarrow x_0)$$

$$\text{Es: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \text{sen}(x) \approx x \quad (x \rightarrow x_0)$$

1. Proprietà fondamentale (a cosa serve l'equivalenza):

$$f_1(x) \approx f_2(x)$$

$$g_1(x) \approx g_2(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \quad (x \rightarrow x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\text{sen}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1 \quad (x \rightarrow x_0)$$

$$e^x - 1 \approx x$$

$$\text{sen}(x) \approx x$$

L'uso dell'equivalenza serve nello studio del limite a sostituire a espressioni complicate espressioni più semplici equivalenti.

2. Passaggio dagli o-piccoli alle equivalenze:

$$f(x) = g(x) + o(g(x)) \quad (x \rightarrow x_0) \Leftrightarrow f(x) \approx g(x) \quad (x \rightarrow x_0)$$

$$e^x = 1 + x + o(x) \quad (x \rightarrow x_0)$$

$$\text{Es: } \Leftrightarrow e^x - 1 = x + o(x) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\Leftrightarrow e^x - 1 \approx x \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\text{sen}(x) = x + o(x) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\text{Es: } T_1(x) = \text{sen}(0) + \cos(0)x$$

$$\text{sen}(x) \approx x \quad (x \rightarrow 0)$$

Esercizio: calcolare la formula di Taylor a ordine n ($x_0 = 0$) $\cos(x), \text{sen}(x), \text{senh}(x)$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos(x) - \text{sen}(x)}{\cos(x) - \cosh(x)}$ verificare se si tratta o meno di una forma indeterminata del tipo

$$\frac{1-1-0}{1-1} = \frac{0}{0}$$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$\cos(x) = 1 + o(x) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\text{sen}(x) = x + o(x)$$

Se proviamo a semplificare si ottiene 0, non basta, il primo ordine non è sufficiente, allora calcoliamo fino al secondo ordine.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\sin(x) = x + o(x^2)$$

Ora non tutto quello che abbiamo scritto si semplificherà, quindi basta il second'ordine.

$$e^x - \cos(x) - \sin(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - (x + o(x^2)) =$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x + o(x^2) = x^2 + o(x^2)$$

o-piccolo è solo una notazione generica per intendere l'errore: gli o-piccoli non si semplificano con altri o-piccoli;

$$5o(x^2) = o(x^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{5x^2} = 0$$

Quando però abbiamo più o-piccoli, vale sempre l'o-piccolo di ordine inferiore.

$$o(x^2) + o(x^3) = o(x^2) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$x^3 + o(x^2) = o(x^2)$$

$$\text{perché } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = 0$$

$$e^x - \cos(x) - \sin(x) = x^2 + o(x^2) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\Leftrightarrow e^x - \cos(x) - \sin(x) \approx x^2 \quad (x \rightarrow 0)$$

Denominatore:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\cos(x) - \cosh(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = -x^2 + o(x^2)$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) - \cosh(x) \approx -x^2 \quad (x \rightarrow 0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

$$\text{Es: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - \sin(x)) \cdot (x - \sinh(x))}{\cos(x) \cdot \sin(x^2)} = \frac{1 \cdot 0}{1 \cdot 0} = \frac{0}{0}$$

$$e^x = 1 + o(1) \quad (x \rightarrow 0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{1} = 0$$

$$e^x - 1 = o(1)$$

$$\text{sen}(x) = o(1) \quad (x \rightarrow 0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{1} = 0$$

$$e^x - \text{sen}(x) = 1 + o(1) + o(1) = 1 + o(1)$$

$$e^x - \text{sen}(x) \approx 1 \quad x \rightarrow 0$$

$$x - \text{senh}(x)$$

$$\text{senh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\text{senh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$x - \text{senh}(x) = x - \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$x - \text{senh}(x) \approx -\frac{x^3}{6} \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1 \Leftrightarrow \cos(x) = 1 + o(1) \Leftrightarrow \cos(x) \approx 1 \quad x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{1} = 0$$

$$(y \rightarrow 0) \text{sen}(y) = y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{5!} + \dots + (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(y^{2k+1})$$

$$y = x^2$$

Nello sviluppo già noto della funzione sostituiamo x^2

$$\text{sen}(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{(x^2)^5}{5!} + \dots + (-1)^k \frac{(x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left((x^2)^{2k+1}\right) \quad (y \rightarrow 0)$$

$$\text{sen}(y) = y + o(y)$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}(y) \approx y$$

$$\text{sen}(x^2) = x^2 + o(x^2) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}(x^2) \approx x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot \left(-\frac{x^3}{6} \right)}{1 \cdot x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{6} x \right)$$

Esercizio:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos(x) \cdot \text{sen}(x)}{[\cos(x^2) - 1] \cdot [e^{x^3} - 1]}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - \text{sen}(x))(\cos(x) - 1)}{(e^x - 1)(e^{x^2} - 1)}$$

RISOLUZIONE DI LIMITI CON IL POLINOMIO DI TAYLOR

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x_0) \cdot \frac{(x-x_0)^k}{k!}$$

$$R_n(x) f(x) = T_n(x)$$

$$R_n = o((x-x_0)^n)$$

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \text{sen}(x) &= f^0(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0) \frac{(x-x_0)^2}{2!} + f'''(x_0) \frac{(x-x_0)^3}{3!} + o(x^3) = \\ &= 0 + \cos(0)(x-x_0) - \text{sen}(0) \frac{(x-0)^2}{2!} - \cos(0) \frac{(x-0)^3}{3!} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^2)$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{3x} + \text{sen}(3x)}{\cos(x) - 1}$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$$

$$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{9x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\text{sen}(3x) = 3x + o(x^2)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Con quale grado decidiamo di approssimare? Si tratta di una decisione più o meno arbitraria, generalmente approssimiamo fino al secondo ordine, in modo tale che l'equazione si semplifichi parecchio, ma non del tutto.

$$L = \frac{1 + x^2 + o(x^2) - 1 - 3x - \frac{9x^2}{2} - o(x^2) + 3x + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1} = \frac{\frac{2x^2 - 9x^2}{2} + o(x^2)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{-7x^2 + o(x^2)}{-x^2 + o(x^2)} = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1 - x \lg(x)}{x^{2x} - 1 - 2x \lg(x)}$$

$$x \lg(x) = \frac{\lg(x)}{\frac{1}{x^\alpha}} \rightarrow 0$$

$$e^{x \lg(x)} = 1$$

$$x^x = e^{x \lg(x)} = 1 + x \lg(x) + x^2 \lg^2(x) + o(x^2 \lg^2(x))$$

$$x^{2x} = e^{2x \lg(x)} = 1 + 2x \lg(x) + 2x^2 \lg^2(x) + o(x^2 \lg^2(x))$$

$$L = \frac{x^x - 1 - x \lg(x)}{x^{2x} - 1 - 2x \lg(x)} \approx \frac{1 + x \lg(x) + \frac{x^2 \lg^2(x)}{2} - 1 - x \lg(x)}{1 + 2x \lg(x) + 2x^2 \lg^2(x) - 1 - 2x \lg(x)} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Es: } L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot \exp\left(\frac{\sqrt{\pi}}{x} \operatorname{sen}(x \lg 7)\right)$$

- A. $L = +\infty$
- B. non esiste
- C. $L = 0$
- D. altro

$$\frac{1}{0^+} \exp\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$y = x \lg 7$$

$$\operatorname{sen}(y) \approx y \Rightarrow \operatorname{sen}(y) = y + o(y)$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}(x \lg 7) \approx x \lg 7$$

$$\exp\left(\frac{\sqrt{\pi}}{x} \operatorname{sen}(x \lg 7)\right) \approx \exp\left(\frac{\sqrt{\pi}}{x} \cdot x \lg 7\right) = \exp(\sqrt{\pi} \cdot \lg 7) = \exp\left(\frac{\sqrt{\pi}}{x} \cdot \operatorname{sen}(x \lg 7)\right) =$$

$$= \exp\left(\frac{\sqrt{\pi}}{x} \cdot (x \lg 7 + o(x))\right) (x \rightarrow 0)$$

$$= \exp\left(\sqrt{\pi} \lg 7 + \frac{o(x)}{x}\right) = \exp(\sqrt{\pi} \lg 7 + o(1)) (x \rightarrow 0)$$

Funzione che tende a 0 per x che tende a 0; ma siccome $\exp(0) = 1$, tende a 1.

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot \exp(\sqrt{\pi} \lg 7) = +\infty$$

Nel caso di prodotti oppure composizioni di funzioni è sufficiente considerare il primo termine dello sviluppo di Taylor delle funzioni coinvolte.

$$f(x) = o(1) \quad x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \exp(f(x)) \quad x \rightarrow x_0$$

per le proprietà delle equivalenze

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \exp(o(1)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \exp(0) = 1$$

$$\text{Es: } L = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^x - e^x + x^a}{\text{sen}(\sqrt{x})}, a > 0$$

$$\text{A. } L = 1, \forall a > 0$$

$$\text{B. } L \text{ non esiste per alcun } a \in \mathbb{R}$$

$$\text{C. } L = +\infty \text{ se } a < \frac{1}{2}, L = 0 \text{ se } a > \frac{1}{2}$$

$$\text{D. } L = 1 \text{ se } a < 1$$

$$x^x = e^{x \lg x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \lg x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lg x^{(H)}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

$$\frac{1-1+0}{0}$$

Il carattere del numeratore è determinato dal termine che tende a 0 più lentamente
 $\text{sen}(y) \approx y \quad (y \rightarrow 0)$

$$y = \sqrt{x} \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\Rightarrow \text{sen}(\sqrt{x}) \approx \sqrt{x} \quad (x \rightarrow 0^+)$$

$$x = y^2 \quad \text{sen}(\sqrt{y^2}) = \text{sen}|y| = \text{sen}(y)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad (a = 1)$$

Sviluppo fino al second'ordine perché c'è un altro termine x^a che tende a 1 per $x \rightarrow 0$ che si semplifica con e^x .

$$e^x = 1 + x + o(x) \quad a \neq 1 \text{ perché } x^a \text{ non potrebbe più essere semplificato con } e^x.$$

$$y = x \lg x \quad (x \rightarrow 0^+)$$

$$e^y = 1 + y + o(y) \quad (y \rightarrow 0)$$

$$x^x = e^{x \lg x} = 1 + x \lg x + o(x \lg x) \quad (x \rightarrow 0^+)$$

$$x^x - e^x + x^a = 1 + x \lg x + o(x \lg x) - 1 + x + o(x) + x^a = x \lg x + x^a - x + o(x \lg x) + o(x)$$

per $a \neq 1$ dobbiamo stabilire chi va a 0 più lentamente.

$$x \lg x = o(x^a) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$x^a = o(x \lg x) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \lg(x)}{x^a} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-1-a} \lg(x) = \begin{cases} 0 < a < 1; x^\beta \lg(x); \beta > 0 \\ a = 0; x^{-1} \lg(x) = \lg(x) = -\infty \\ a > 1; x^{1-a} \lg(x) = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta \lg(x) = 0, \beta > 0$$

$$x \lg(x) = o(x^a), (x \rightarrow 0^+), 0 < a < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \mp \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^a}{x \lg(x)} = 0, a \geq 1$$

$$x^a = o(x \lg(x)), (x \rightarrow 0^+), a \geq 1$$

per $a < 1$ il termine che va a 0 più lentamente è $x \lg(x) + x^a - x + o(x \lg(x)) + o(x)$

$$x \lg(x) = o(x^a)$$

$$x = o(x^a)$$

$$o(x \lg(x)) + o(x) = o(x^a)$$

$o(x^a)$ = operatori che vanno a 0 più rapidamente di x^a

$$a < 1 \quad \mathbb{N} \quad x^a + o(x^a) \approx x^a, (x \rightarrow 0^+)$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^a}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{a-\frac{1}{2}} = \begin{cases} +\infty, 0 < a < \frac{1}{2} \\ 1, a = \frac{1}{2} \\ 0, \frac{1}{2} < a < 1 \end{cases}$$

se $a > 1$

$$x^x - e^x + x^a - x \lg(x) + x^a - x + o(x \lg(x)) + o(x), (x \rightarrow 0^+)$$

$$x^a = o(x \lg(x))$$

$$x = o(x \lg(x))$$

$$o(x \lg(x)) + o(x) = o(x \lg(x))$$

$$= x \lg(x) + o(x \lg(x)) \approx x \lg(x)$$

se $a = 1$

$$x^x - e^x + x^a = x \lg(x) + x - x + o(x \lg(x)) + o(x) \approx x \lg(x), (x \rightarrow 0^+)$$

$$o(x) = o(x \lg(x))$$

$x \lg(x)$ è il termine dominante del nostro limite.

se $a \geq 1$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \lg(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \lg(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{2}} \lg(x) = 0$$

$$L = \begin{cases} +\infty, 0 < a < \frac{1}{2} \\ 1, a = \frac{1}{2} \\ 0, a \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

La risposta esatta è la C.

$$\text{Esercizio: } I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(2x)^a \left(\exp\left(\frac{1}{2x-1}\right) - 1 \right) \right]$$

A. $I = 0, \forall a$

B. $a < 1 \Rightarrow I = 0$

C. $\forall a, I \neq +\infty$

D. $\forall a, I \neq 1$

$$a > 0, x^a \rightarrow +\infty$$

$$a = 0, x^a = 1$$

$$a < 0, x^a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x-1} = 0$$

$$\exp\left(\frac{1}{2x-1}\right) - 1 \approx 0, (x \rightarrow +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\exp\left(\frac{1}{2x-1}\right) - 1 \right] = 1^0 - 1 = 0$$

Quindi il nostro limite sarà:

$$a > 0 \quad +\infty \cdot 0$$

$$a = 0 \quad 1 \cdot 0 \quad I = 0$$

$$a < 0 \quad 0 \cdot 0 \quad I = 0$$

Noi studiamo solo la forma indeterminata perché conosciamo già le altre quantità.

$$a > 0$$

$$I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(2x)^a \left(\exp\left(\frac{1}{2x-1}\right) - 1 \right) \right]$$

$$y = \frac{1}{2x-1} \Leftrightarrow \frac{1}{y} = 2x-1 \Leftrightarrow 2x = 1 + \frac{1}{y}$$

$$(x \rightarrow +\infty) \Leftrightarrow (y \rightarrow 0^+)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \left[\left(1 + \frac{1}{y} \right)^a (\exp(y) - 1) \right]$$

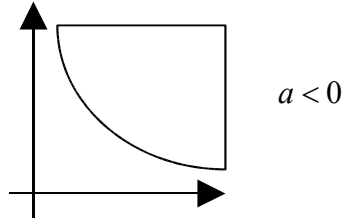
$$e^y = 1 + y + o(y), (y \rightarrow 0)$$

$$e^y - 1 = y + o(y), (y \rightarrow 0)$$

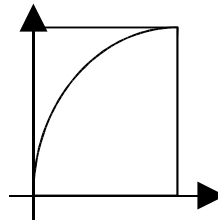
$$e^y - 1 \approx y, (y \rightarrow 0)$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{(1-y)^a}{y^a} \cdot y = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+y)^a \cdot y^{-1-a} = \begin{cases} 0, & 0 < a < 1 \\ 1, & a = 1 \\ +\infty, & a > 1 \end{cases}$$

$$I = \begin{cases} 0, & a < 1 \\ 1, & a = 1 \\ +\infty, & a > 1 \end{cases} \quad \text{La risposta esatta è la B.}$$



$a < 0$



$a > 0$

Esercizio:
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{\frac{1}{x}} - \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}}{\left(\sqrt{1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)} - \sqrt{1 + \sinh\left(\frac{1}{x}\right)}\right)^2}$$

$$y = \frac{1}{x}, (x \rightarrow +\infty) \Leftrightarrow (y \rightarrow 0^+)$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{2e^y - \cos(y) - y^y}{\left(\sqrt{1 + \sin(y)} - \sqrt{1 + \sinh(y)}\right)^2} = \frac{2 - 1 - 1}{(\sqrt{1} - \sqrt{1})^2} = \frac{0}{0}$$

Applichiamo Taylor per risolvere l'indeterminazione.

$$e^x = 1 + y + o(y), (y \rightarrow 0^+)$$

$$\cos(y) = 1 + o(y)$$

$$y^y = e^{y \lg(y)} = 1 + y \lg(y) + o(y \lg(y))$$

Essendo sviluppi disomogenei ci fermiamo al prim'ordine.

$$2e^y - \cos(y) - y^y = 2(1 + y + o(y)) - (1 + o(y)) - (1 + y \lg(y) + o(y \lg(y))) = 2y - y \lg(y) + o(y) + o(y \lg(y)), (y \rightarrow 0^+)$$

$$2y = o(y \lg(y))$$

$$o(y) = o(y \lg(y))$$

$$= -y \lg(y) + o(y \lg(y)) \approx -y \lg y$$

Chi tende a 0 più lentamente?

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{y \lg(y)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\lg(y)} = 0$$

$$y = o(y \lg(y)), (x \rightarrow 0^+)$$

$$D = \sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$$

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

$$x - y = \frac{x^2 - y^2}{x + y}$$

$$\left(\sqrt{1 + \operatorname{sen}(y)} - \sqrt{1 + \operatorname{senh}(x)} \right)^2 = \left(\frac{1 + \operatorname{sen}(y) - 1 - \operatorname{senh}(y)}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}(y)} + \sqrt{1 + \operatorname{senh}(y)}} \right)^2$$

Cioè il denominatore tende a $2^2 = 4$, quindi guardiamo solo lo sviluppo del seno e del seno iperbolico per stabilire il valore della somma.

$$\approx \frac{(\operatorname{sen}(y) - \operatorname{senh}(y))^2}{4}$$

$$\operatorname{sen}(y) = y - \frac{y^3}{6} + o(y^3)$$

$$\operatorname{senh}(y) = y + \frac{y^3}{6} + o(y^3)$$

$$\operatorname{sen}(y) - \operatorname{senh}(y) = y - \frac{y^3}{6} + o(y^3) - y - \frac{y^3}{6} + o(y^3) = -\frac{y^3}{3} + o(y^3) \approx -\frac{y^3}{3}, (y \rightarrow 0^+)$$

$$\approx \frac{\left(-\frac{y^3}{3} \right)^2}{4} = \frac{y^6}{36}, (y \rightarrow 0^+)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-y \lg(y)}{\frac{y^6}{36}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-36y^{-5} \lg(y)) = +\infty$$