

GLI INSIEMI DEI NUMERI E LE LORO PROPRIETÀ

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ è l'insieme dei numeri naturali, è un insieme induttivo:

$1 \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{N}$ allora $x+1 \in \mathbb{N}$

$2 = 1+1$ $3 = 2+1$ $4 = 3+1$...

Un insieme è induttivo se tutti i suoi elementi si ottengono da un unico elemento.

$1 \in \mathbb{N}$; se $x \in \mathbb{N}$, allora $x+1 \in \mathbb{N}$

PRINCIPIO DI INDUZIONE

Proprietà $P(n)$, n è in indice naturale $n = 1, 2, 3, \dots$

1. Verificare che $P(1)$ sia vera

2. Se $P(n)$ è vera, provare che da ciò segue $P(n+1)$ è vera con $\forall n$

Es: Disuguaglianza di Bernoulli

$P(n) = " \forall x > 0 \text{ vale } (1+x)^n \geq 1+nx "$, $n \in \mathbb{N}$

$P(1) = " \forall x > 0 \text{ vale } (1+x)^1 \geq 1+x "$

$P(2) = " \forall x > 0 \text{ vale } (1+x)^2 \geq 1+2x "$
 $1+2x+x^2 \geq 1+2x$

$P(n) = " \forall x > 0, (1+x)^n \geq 1+nx "$ è vera fino all'indice n .

Verifichiamo allora il Passo 2.

$P(n+1) \forall x > 0 \quad (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$?

$1+x \geq 0 \quad (1+x)^n \geq 1+nx$

$x > 0 \quad \square$

$(1+x) \cdot (1+x)^n \geq (1+x) \cdot (1+nx)$

\square

$(1+x)^{n+1} \geq 1+x+nx+nx^2$

\square

$(1+x)^{n+1} \geq 1+x+nx+nx^2 \geq 1+(n+1)x$

FATTORIALE DI UN NUMERO NATURALE

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$

$0! = 1^*$

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

...

$n! = n \cdot (n-1)!$

* $0! = 1$ è stabilito per convenzione

VERIFICHIAMO PER INDUZIONE

$$P(n) = "n! = n(n-1)! \forall n \in \mathbb{N}"$$

$$P(1) = "1! = 1 \cdot 0! = 1 \cdot 1 = 1"$$

$$P(2) = "2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1 = 2"$$

$$P(n) = "n! = n \cdot (n-1)!"$$

$$P(n+1) = "(n+1)! = (n+1) \cdot n!"$$

$$n! = n \cdot (n-1)! = n(n-1) \cdot (n-2) \dots$$

$$(n-1)! = (n-1) \cdot (n-2)!$$

$$(n+1)n! = (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots = (n+1)!$$

\mathbb{Z} è l'insieme dei numeri interi = $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$

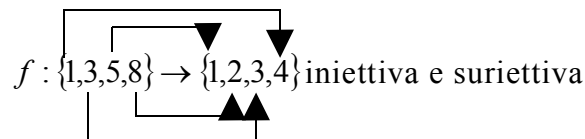
CONTARE GLI ELEMENTI DI UN INSIEME

$A = \{1, 3, 5, 8\}$ ha 4 elementi

Un insieme A è finito quando ha cardinalità $n \in \mathbb{N}$ se esiste

$$f : A \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\} \text{ iniettiva e suriettiva}$$

(posso cioè mettere in corrispondenza biunivoca A e $\{1, 2, 3, \dots, n\}$)



$$f(1) = 4$$

$$f(3) = 3$$

$$f(5) = 1$$

$$f(8) = 2$$

La cardinalità di A è 4

🌀 Osservazione: la cardinalità di un insieme finito è unica.

Quante funzioni f sono possibili tali che f sia iniettiva e suriettiva? $n!$ (cioè il numero massimo di combinazioni possibili)

$n!$ rappresenta il numero di modi in cui posso ordinare un insieme costituito da n elementi.

$$a \rightarrow 1$$

$$f(a) = 1$$

$$\{a, b\} \rightarrow \{1, 2\}$$

$$f(a) = 1 \mid f(a) = 2$$

$$f(b) = 2 \mid f(b) = 1$$

$$\{a, b, c\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$$

$1\ 2\ 3\ f=3!$
 $2\ 1\ 3$
 $2\ 3\ 1$
 $1\ 3\ 2$
 $3\ 1\ 2$
 $3\ 2\ 1$

$n!$ è il numero di possibilità in cui posso permutare l'insieme $\{1, \dots, n\}$

\mathbb{N} è costituito da un numero infinito di elementi.

Non ha cardinalità finita $f: \mathbb{N} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ iniettiva

\mathbb{N} è numerabile (ha un numero finito di elementi)

$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ è iniettiva e suriettiva?

$\{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

$\{1, 2, 3, 4, \dots\}$

\mathbb{Z} -3 -2 -1 0 1 2 3

\mathbb{N} 7 5 3 1 2 4 6

Numero da uno a n l'insieme \mathbb{Z} partendo da 0 e prendendo poi il primo numero positivo, il primo numero negativo, il primo numero positivo non contato, il primo numero negativo non contato e così via...

Quindi \mathbb{Z} è numerabile.

Sappiamo che come insieme $\mathbb{N} \leq \mathbb{Z}$ ma se contiamo gli elementi, hanno la stessa cardinalità.

$a \in \mathbb{Q}$ = insieme dei numeri razionali

$a = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z} \quad q \neq 0$

$\frac{-2}{-3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}; \frac{5}{7}; -\frac{1000}{5}; \dots$

$\mathbb{Q} \geq \mathbb{Z}, \mathbb{N} \quad q = 1$

$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$ è iniettiva e suriettiva?

Si, \mathbb{Q} è un insieme numerabile.

Insieme dei numeri reali positivi

1	2	3	4	5	...
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$...
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$...
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{9}{4}$...
...

$$f(1) = 1; f(2) = 2; f\left(\frac{1}{2}\right) = 3; f(3) = 4; f\left(\frac{3}{2}\right) = 5; \dots$$

Se conto gli elementi, \aleph , \mathbb{Z} e \mathbb{Q} hanno tutti la stessa cardinalità.

$$\aleph \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Supponiamo $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$, con $p, q \in \aleph$ primi fra loro.

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \rightarrow 2q^2 = p^2 \text{ non ci sono soluzioni in } \aleph \text{ perché } p \text{ e } q \text{ sono primi tra loro.}$$

Supponiamo q pari $\rightarrow p$ dispari $\rightarrow p^2$ dispari

Supponiamo q dispari:
 A) $p = \text{pari}$
 B) $p = \text{dispari}$

A) $2q^2 = p^2 \rightarrow 2$ compare un numero pari di volte.

↓

2 compare una volta sola.

B) 2 compare una volta $\rightarrow 2$ non compare mai in p e in q , quindi non posso MAI risolvere

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \text{ con } p, q \in \aleph.$$

$$n \in \aleph$$

$$1537 = 1 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

$$-1537 = -(1 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0)$$

$$q \in \mathbb{Q}$$

$$1537,62 = 1 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$$

$$1537,62\bar{3} = 1 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4} + \dots$$

$$x \in \aleph$$

$$x_q x_{q-1} \dots x_1 x_0, x_{-1} x_{-2} x_{-3} \dots$$

infinite cifre decimali.

RAPPRESENTAZIONE DI UN NUMERO x IN BASE p

$$x \in \aleph$$

$$p \in \aleph, p \geq 2$$

cifre $\{0, 1, 2, 3, \dots, p-1\}$

PRINCIPIO POSIZIONALE: a seconda della posizione della cifra, il numero ha un valore diverso.

Es: $p = 10$ cifre $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$$152 = 1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 2$$

$$(152)_6 = 1 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6 + 2 = (68)_{10}$$

$$(1011)_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2 + 1 = (11)_{10}$$

$p = 2$ cifre $\{0,1\}$

$p = 8$ cifre $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

$p = 16$ cifre $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, A, B, C, D, E, F\}$ dopo la base 10 si usano le lettere perché mancano le cifre.

TRASFORMARE UN NUMERO DA P=10 A P=X

$57 = 5 \cdot 10 + 7$ quanto vale in base 2? $(a_n a_{n-1} \dots a_0)$

$57:2=28$ resto **1** la cifra più bassa del numero in base 2 = a_0

$28:2=14$ resto **0** = a_1

$14:2=7$ resto **0** = a_2

$7:2=3$ resto **1** = a_3

$3:2=1$ resto **1** = a_4

↑ numero più piccolo della base → cifra più alta = a_5

$$(111001)_2 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^0 = 57$$

Es:

$57:8=7$ resto **1** = a_0

$(71)_8 = 7 \cdot 8 + 1 = 56 + 1 = 57$ base 10

$$x = (a_n a_{n-1} \dots a_0) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p^1 + a_0 p^0 = \sum_{i=0}^n a_i p^i$$

$i =$ indici naturali = 0, 1, 2, ..., n

$$x \in \mathbb{Z}, x < 0$$
$$x = -57 = -(5 \cdot 10 + 7)$$

$p = 2 \Rightarrow -(111001)_2$ Il problema del cambiamento di base non sorge con i numeri interi perché l'unica differenza sta nell'aggiungere un - prima del numero.

$$x \in \mathbb{Z}, x < 0 \quad - (a_n a_{n-1} \dots a_0) = - \sum_{i=0}^n a_i p^i$$

$x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists s, q \in \mathbb{Z}, q > 0$ tali che

$$\downarrow \quad x = \frac{s}{q}$$

numero finito di cifre decimali, oppure rappresentazione periodica.

$$x = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m})_p \text{ oppure}$$

$$x = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m} \overline{a_{-(m+1)} \dots a_{-(m+l)}})_p$$

$$\frac{2}{3} = 0, \overline{6} = (0,2)_3 = 2 \cdot 3^{-1}$$

Un numero razionale ammette sempre una rappresentazione finita in una base q se

$$x = \frac{p}{q}, (q < 0)$$

$$57,12 = 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$$

$$(57,12)_8 = 5 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 + 1 \cdot 8^{-1} + 2 \cdot 8^{-2}$$

$$(101,11)_2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2}$$

$$x = \frac{s}{q} \quad (q > 0) \quad n, m \in \mathbb{N}$$

$$x = (a_n a_{n-1} \dots a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m})_q = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \dots + a_0 q^0 + a_{-1} q^{-1} + \dots + a_{-m} q^{-m} =$$

$$= \sum_{i=-m}^n a_i q^i = \sum_{i=0}^n a_i q^i + \sum_{i=-m}^{-1} a_i q^i$$

$$x = \frac{s}{q} \quad s \geq q \quad s = b \cdot q + y \quad b \in \mathbb{N}, y \in \{0, 1, \dots, q-1\}$$

$$x = \frac{s}{q} = \frac{bq + y}{q} = b + \frac{y}{q} \quad 0 \leq y < q$$

$$b = (a_n \dots a_0)_q \quad \frac{y}{q} = (0, a_{-1}, \dots)_q$$