

Formule di telecomunicazioni

PAM

descrizione generica di un segnale PAM:

$$s(t) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} a_n g(t - nT)$$

a_n = sequenza di simboli

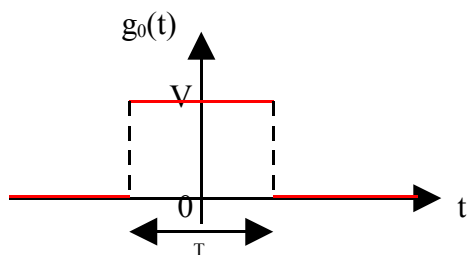
$N + 1$ = lunghezza della sequenza di simboli
(può essere finita o infinita)

T = tempo di simbolo

$g(t)$ = impulso ottenuto per traslazione di un tempo T_d di un'altra forma d'onda $g_0(t)$

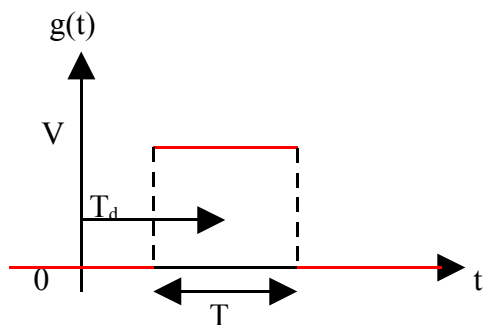
$g_0(t)$ = impulso rettangolare
centrato all'istante $t = 0$
durata = T
ampiezza = V

$$g_0(t) = V \text{ rect}(t/T)$$



$$g(t) = g_0(t - T_d)$$

T_d = traslazione dall'origine



- se T_d è noto → segnale SINCRONO
- se T_d è aleatorio → segnale ASINCRONO

⇒ i segnali PAM sono costituiti da un treno di impulsi modulati in ampiezza dai simboli
 la durata della forma d'onda $g(t)$ restituisce un'informazione relativa al tempo per trasmettere ogni simbolo

T = tempo di simbolo
 $R_s = 1/T$ frequenza di simbolo
 [simboli/sec] = [baud]

2) PPM

$$s(t) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} g_{\Delta}(t - nT - a_n T_p)$$

a_n = sequenza di simboli
 $a_n \in A = \{0, 1, 2, \dots, L-1\}$

T_p = frazione del tempo di simbolo
 $T_p = T/L$

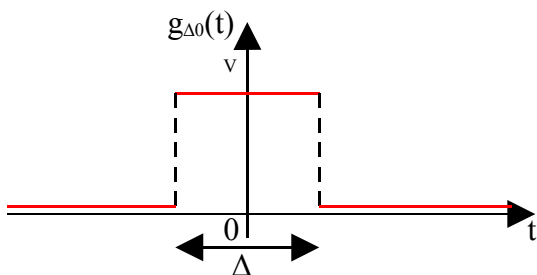
T = tempo di simbolo
 $R_s = 1/T$ frequenza di simbolo

$N+1$ = lunghezza della sequenza da trasmettere

- se T_d è noto → segnale sincrono
- se T_d è aleatorio → segnale asincrono

⇒ $g_{\Delta}(t) = g_{\Delta 0}(t - T_d)$ $g_{\Delta}(t)$ è ottenuta traslando $g_{\Delta 0}$ di T_d

$g_{\Delta 0}(t)$ = un impulso rettangolare
 centrato in 0
 ampiezza = V
 durata Δ $\Delta < T$



$$\Delta = T/L$$

Es.

$$L = 2$$

$$A = \{0, 1\}$$

$$T_p = \Delta = T/2$$

⇒ I simboli non vanno a modulare l'ampiezza del segnale ma ritardano la forma d'onda, ossia la posizione della forma d'onda sull'asse dei tempi

3) PWM

$$s(t) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} g_{\Delta_n}(t - nT)$$

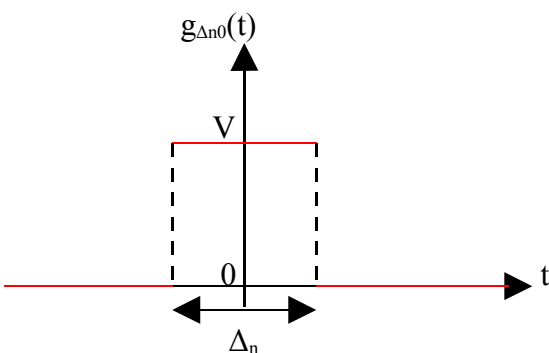
$$\{a_n\} \quad A = \{1, 2, \dots, L\}$$

$$T_p = T/L \quad \text{frazione del tempo di simbolo}$$

- se T_d è noto → segnale sincrono
- se T_d è aleatorio → segnale asincrono

$$g_{\Delta_n}(t) = g_{\Delta_{n0}}(t - T_d)$$

$g_{\Delta_{n0}}(t)$ = impulso rettangolare
centrato in 0
ampiezza = V
durata $\Delta_n = a_n T_p$ $\Delta_n \leq T$



⇒ Il segnale è un treno di impulsi che non si sovrappongono, ciascuno di durata Δ_n che dipende dal simbolo e ritardati di T_p
ogni impulso quindi è modulato in durata dai simboli stessi

CLASSIFICAZIONE DEI SISTEMI

1) Sistemi lineari

Data una n-pla di coefficienti a_k e una n-pla di segnali $x_k(t)$

$$\begin{array}{l} a_k \quad K = 1, \dots, N \\ x_k(t) \quad K = 1, \dots, N \end{array}$$
$$T \left[\sum_{K=1}^N a_k x_k(t) \right] = \sum_{K=1}^N a_k T [x_k(t)]$$

2) Sistemi tempo invariante

dato un tempo τ un sistema è detto tempo invariante se la trasformazione del segnale $x(t)$ ritardata di τ è uguale alla risposta $y(t)$ ritardata di un tempo τ

$$T [x(t - \tau)] = y(t - \tau) \quad \tau \quad x(t)$$

⇒ Un sistema lineare e tempo invariante (LTI) costituisce la maggior parte dei sistemi all'interno del collegamento
in alcuni casi si può considerare LTI il mezzo trasmissivo

3) Sistemi causali

un sistema si dice causale se l'uscita $y(t)$ all'istante t_0 dipende dall'entrata $x(t)$ solo per gli istanti $t \leq t_0$

$$y(t = t_0) \text{ dipende da } x(t) \text{ solo per } t \leq t_0$$

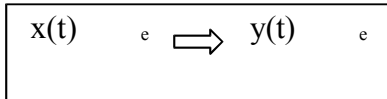
4) Sistemi senza memoria

un sistema si dice senza memoria se l'uscita $y(t)$ all'istante t_0 dipende solo dall'entrata $x(t)$ all'istante t_0 e non dalla storia precedente del segnale

$$y(t = t_0) \text{ dipende solo da } x(t_0)$$

5) Sistemi reali

un sistema si dice reale se risponde a ingressi $x(t)$ reali con uscite $y(t)$ reali



SISTEMI NOTEVOLI

1)

ATTENUATORE	
$y(t) = A x(t)$	$A < 1$

- lineare
- tempo invariante
- causale
- senza memoria
- reale

2)

AMPLIFICATORE	
$y(t) = G x(t)$	$G > 1$

- lineare
- tempo invariante
- causale
- senza memoria
- reale

3)

DERIVATORE	
$y(t) = \frac{d x(t)}{dt}$	

- lineare
- tempo invariante
- causale
- senza memoria
- reale

4) RITARDATORE
 $y(t) = x(t-t_d)$

- lineare
- tempo invariante
- causale
- reale
-

5) QUADRATORE
 $y(t) = x^2(t)$

- no lineare
- tempo invariante
- causale
- senza memoria
- reale

6) ATTENUATORE
con attenuazione variabile nel tempo
 $y(t) = A(t) \cdot x(t)$

- lineare
- no tempo invariante

} non sono sistemi LTI

ELEMENTI PER CLASSIFICARE I SEGNALI

Dato un segnale generico $v(t)$
(supponiamo sempre che i segnali generici siano definiti da $-\infty$ a $+\infty$)
definiamo:

• VALOR MEDIO TEMPORALE DEL SEGNALE

$$\langle v(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t) dt$$

- ENERGIA DI UN SEGNALE

$$E_v = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)^2 dt$$

- POTENZA ISTANTANEA

$$p_v(t) = v(t)^2$$

- POTENZA DEL SEGNALE

$$P_v = \langle p_v(t) \rangle = \langle v(t)^2 \rangle$$

- VALORE EFFICACE

$$V_{\text{eff}} = \sqrt{P_v}$$

SEGNALI PERIODICI

Un segnale si dice periodico di periodo T_0 se:

$$v(t + kT_0) = v(t) \quad \begin{matrix} k \\ t \end{matrix}$$

quindi il segnale periodico si può scrivere come:

$$v(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m \cdot g(t - m \cdot T_0)$$

- nel caso di segnali periodici il valore medio temporale si può calcolare come:

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} v(t) dt$$

$$\langle v(t) \rangle = (1/T_0) \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} v(t) dt$$

ENERGIA FINITA/POTENZA FINITA

$P = \frac{P_x}{R_i}$	potenza = $\frac{\text{potenza del segnale}}{\text{resistenza eq. di ingresso}}$	$\frac{[V^2]}{[\Omega]} = [W]$
-----------------------	--	--------------------------------

SEGNALI COMPLESSI

$$\langle v(t) \rangle = 0$$

$$E_v = \infty$$

$$P_v = A^2$$

SEGNALI PERIODICI: SVILUPPO DI FOURIER

$$v(t) = v(t + k \cdot T_0) \quad k, t$$

Se $v(t)$ è un segnale periodico allora può essere descritto mediante lo sviluppo in serie di Fourier:

$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{j2\pi n \cdot f_0 \cdot t}$

SVILUPPO IN SERIE

DI FOURIER

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0 = 1/T_0 \\ c_n \end{array} \right.$$

$c_n = (1/T_0) \int_{-T_0/2}^{T_0/2} v(t) \cdot e^{-j2\pi n \cdot f_0 \cdot t} dt$
--

coefficiente dello
sviluppo in serie di Fourier

il segnale periodico può essere espresso come:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| \cdot e^{j(2\pi n \cdot f_0 + \arg c_n) t}$$

$$n = -\infty$$

PROPRIETA'

1) $c_0 = \langle v(t) \rangle$ valore medio temporale del segnale

2) se $v(t)$ \Rightarrow $c_{-n} = c_n^*$

3) se $v(t)$ \Rightarrow $v(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2 |c_n| \cos(2\pi \cdot n \cdot f_0 \cdot t + \arg c_n)$

TEOREMA DI PARSEVAL (PER SEGNALI PERIODICI)

$$P_v = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

SEGNALI AD ENERGIA FINITA: TRASFORMATA DI FOURIER

$$\{v(t)\} = V(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

ANTITRASFORMATA DI FOURIER

$$v(t) = \mathcal{F}^{-1} \{V(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-j2\pi f t} df$$

PROPRIETA' GENERALI

- 1) se la trasformata di Fourier esiste, essa è unica
- 2) in generale la trasformata di Fourier è una funzione complessa, e quindi può essere scritta nella

forma:

$$V(f) = |V(f)| e^{j \arg(V(f))}$$
$$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |V(f)| e^{j(2\pi f t + \arg(V(f)))} df$$

PROPRIETA' FONDAMENTALI TRASFORMATA DI FOURIER

1) la trasformata di Fourier valutata alla frequenza zero coincide con l'area sottesa da $v(t)$

$$V(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{j0} dt$$

2) se $v(t)$ è reale $V(-f) = V(f)^*$

3) se $v(t)$ è reale $\implies v(t) = 2 \int_0^{+\infty} |V(f)| \cos(2\pi f t + \arg(V(f))) df$

TEOREMA DI PARSEVAL (PER SEGNALI A ENERGIA FINITA)

Dati due segnali $v(t)$ e $w(t)$ entrambi a energia finita, allora:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \cdot w(t)^* dt = \int_{-\infty}^{+\infty} V(f) \cdot W(f)^* df$$

TEOREMA DI RAYLEICH

$$E_v = \int_{-\infty}^{+\infty} |V(f)|^2 df$$

\implies l'energia del segnale è data dall'area sottesa dalla funzione $|V(f)|^2$, considerando il diagramma che riporta lo spettro di ampiezza al quadrato

$|V(f)|^2 =$ densità spettrale di energia

TRASFORMATA DI FOURIER

PROPRIETA'

1) proprietà della somma

dato $v(t) = a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t)$ con a_1, a_2 costanti

allora

$$V(f) = a_1 V_1(f) + a_2 V_2(f)$$

2) proprietà del ritardo

dato $v(t) = v_1(t - t_d)$

allora $V(f) = V_1(f) e^{-j 2 \Pi f t_d}$

3) proprietà del cambio scala

$v(t) = v_1(\alpha t)$ α , $\alpha \neq 0$

$$V(f) = V_1(f / \alpha) / |\alpha|$$

4) proprietà della modulazione

$v(t) = v_1(t) \cos(2 \Pi f_0 t + \varphi)$

$$V(f) = e^{j \varphi} V_1(f - f_0) / 2 + e^{-j \varphi} V_1(f + f_0) / 2$$

5) proprietà di derivazione

$$v(t) = \frac{d^n v_1(t)}{dt^n}$$

$$V(f) = V_1(f) (j 2 \Pi f)^n$$

6) proprietà di convoluzione

$v(t) = v_1(t) * v_2(t)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} v_1(\xi) v_2(t - \xi) d\xi$$

$$V(f) = V_1(f) V_2(f)$$

7) proprietà della moltiplicazione

$$v(t) = v_1(t) v_2(t)$$

$$V(f) = V_1(f) * V_2(f)$$

8) proprietà dell'integrazione

$$v(t) = \int_{-\infty}^t v_1(\tau) d\tau$$

$$V(f) = V_1(f) / (j 2 \pi f) + V_1(0) \delta(f) / 2$$

dove $\delta(f)$ = delta di Dirac

9) proprietà della dualità

$$V(f) = \{v(t)\}$$

$$V(-f) = \{v(t)\}$$

10) proprietà della traslazione della frequenza

$$\{v(t) e^{j 2 \pi f_1 t}\} = V(f - f_1)$$

SEGNALI AD ENERGIA FINITA

Consideriamo un segnale $v(t)$ dato dalla ripetizione periodica di periodo T_0 di un altro segnale $g(t)$ ad energia finita

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t - kT_0)$$

{ $g(t)$ segnale ad energia finita
 $v(t)$ segnale periodico quindi a potenza finita

analisi spettrale:

{ $g(t) \rightarrow G(f)$
 $v(t) \rightarrow c_n$ } \sum esiste un legame tra i coefficienti c_n di $v(t)$ e la trasformata di $g(t)$

$$c_n = \frac{1}{T_0} G(n/T_0)$$

$$n/T_0 = n f_0$$

$$f_0 = 1/T_0$$

FORMULA DI POISSON

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t - kT_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1/T_0) G(n/T_0) e^{j2\pi n t/T_0}$$

TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO

Un segnale $g(t)$ ad energia finita avente banda racchiusa nell'intervallo $[0, B]$ è completamente descritto dai suoi campioni prelevati con passo t_c purché $t_c \leq 1/2B$

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n \cdot t_c) \cdot \text{sinc} \left(\frac{t - n \cdot t_c}{t_c} \right)$$

SEGNALI PERIODICI

per i segnali periodici la trasformata di Fourier può essere scritta come:

$$V(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(f - n f_0)$$

SEGNALI A POTENZA FINITA

• DISUGUAGLIANZA DI SCHWARTZ

Se $v(t)$ e $w(t)$ sono segnali a potenza finita allora:

$$|\langle v(t) \cdot w^*(t) \rangle|^2 \leq P_v \cdot P_w$$

diventa un'uguaglianza se $w(t) = a \cdot v(t)$ $a \in$

• PRODOTTO SCALARE

Siano $v(t)$ e $w(t)$ segnali a potenza finita, indico con prodotto scalare:

$$Z_{v-w} \quad \langle v(t) \cdot w^*(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} v(t) \cdot w^*(t) dt$$

• FUNZIONE DI CROSS-CORRELAZIONE

$$R_{v-w}(\tau) = \langle v(t) \cdot w^*(t-\tau) \rangle$$

PROPRIETA' FUNZIONE DI CROSS-CORRELAZIONE:

- 1) se $v(t), w(t)$
allora $R_{vw}(t)$
- 2) $R_{vw}(\tau) = R_{wv}^*(-\tau)$
- 3) $|R_{vw}(\tau)|^2 \leq P_v \cdot P_w$

• FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE

$$R_v(\tau) = \langle v(t) \cdot v^*(t-\tau) \rangle$$

PROPRIETA' FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE

- 1) se $v(t)$
allora $R_v(\tau)$
- 2) $R_v(0) = P_v$
- 3) $R_v(\tau) = R_v^*(-\tau)$
- 4) $|R_v(\tau)| \leq P_v = R_v(0)$

DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA

$$W_v^d(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_v(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

densità spettrale di potenza bilatera

PROPRIETA' DELLA DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA

- 1) Proprietà fondamentale
- $\int_{\Delta f} W_v^d(f) = P_v$
- 2) $P_v = \int_{-\infty}^{+\infty} W_v^d(f)$
- 3) $W_v^d(f)$ è non negativa

4) se $v(t) \rightarrow W_v^d(f)$ è reale e pari

DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA MONOLATERA

$$S_v^d(f) = \begin{cases} 0 & f < 0 \\ 2 \cdot W_v^d(f) & f \geq 0 \end{cases}$$

PROPRIETA'

1)

$$P_v = \int_{-\infty}^{+\infty} S_v^d(f) df$$

BANDA IMPEGNATA DA UN SEGNALE IN UN SISTEMA

$$H(f) = \frac{y(t)}{x(t)} \quad \text{in regime fasoriale}$$

MODI PER RICAIVARE L'USCITA noto l'ingresso

1) $x(t)$ FASORE

$$x(t) = A_x e^{j(2\pi f t + \phi_x)}$$

$$y(t) = H(f) x(t)$$

2) $x(t)$ SEGNALE PERIODICO

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{xn} e^{j 2 \pi n f_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_{xn}| e^{j(2 \pi n f_0 t + \arg C_{xn})} \end{aligned}$$

$|c_{xn}| \rightarrow$ ampiezza del favore

$\arg C_{xn} \rightarrow$ fase iniziale del favore

2) $x(t)$ SEGNALE PERIODICO

$$C_{yn} = C_{xn} H(nf_0)$$

3) $x(t)$ SEGNALE A ENERGIA FINITA

$$Y(f) = X(f) H(f)$$

4) $x(t)$ SEGNALE A POTENZA FINITA APERIODICO

$$W_y^d(f) = W_x^d(f) |H(f)|^2$$

FUNZIONI DI TRASFERIMENTO DI SISTEMI LTI

1) AMPLIFICATORE

$$H(f) = G_0$$

2) RITARDATORE

$$H(f) = e^{-j2\pi f t_d}$$

3) DERIVATORE

$$H(f) = j2\pi f$$

4) INTEGRATORE

$$H(f) = -j / 2\pi f$$

PROPRIETA' DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

1) se i segnali in entrata e in uscita sono a energia finita allora

$$H(f) = Y(f) / X(f)$$

2) se un sistema LTI è reale, la sua $H(f)$ gode di simmetria hermitiana

$$\text{LTI reale} \implies H(-f) = H^*(f)$$

DISTORSIONE DI UN SEGNALE

$y(t)$ è una replica non distorta di $x(t)$ se

$$y(t) = T_0 x(t - t_d)$$

per un qualche valore di T_0 e t_d

- le condizioni di non distorsione applicate al sistema LTI richiedono che $H(f)$ sia del tipo

$H(f) = T_0 e^{-j2\pi f t_d}$ solo per le frequenze appartenenti alla banda del segnale di ingresso

$$H(f) = T_0 e^{-j2\pi f t_d} \quad f \in B_x$$

FILTRI IDEALI

- 1) FILTRO PASSABANDA IDEALE
IBPF (ideal band pass filter)

soddisfa le condizioni di non distorsione in bande comprese tra

$$f_0 - B/2 < f < f_0 + B/2$$

BANDA PASSANTE del filtro

$f_0 - B/2$ = frequenza di taglio inferiore

$f_0 + B/2$ = frequenza di taglio superiore

B = lunghezza di banda passante

f_0 = frequenza di centro banda

$$H(f) = \begin{cases} T_0 e^{-j2\pi f t_d} & f_0 - B/2 < f < f_0 + B/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

- 2) FILTRO PASSABASSO IDEALE
ILPF (ideal low pass filter)

soddisfa le condizioni di non distorsione in bande comprese tra

$$0 \leq f < B$$

B = banda passante del filtro o frequenza di taglio

$$H(f) = \begin{cases} T_0 e^{-j2\pi ftd} & 0 \leq f < B \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

3) **FILTRO IDEALE PASSA ALTO**
IHPF (ideal high pass filter)

soddisfa le condizioni di non distorsione in bande comprese tra

$$f \geq f_t$$

f_t = frequenza di taglio

$$H(f) = \begin{cases} T_0 e^{-j2\pi ftd} & f \geq f_t \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

4) **FILTRO ELIMINA BANDA**
IBRF (ideal band rejectm filter)

soddisfa le condizioni di non distorsione in bande comprese tra

$$f \leq f_{t1} ; f \geq f_{t2}$$

f_{t1} = frequenza di taglio inferiore

f_{t2} = frequenza di taglio superiore

$$H(f) = \begin{cases} T_0 e^{-j2\pi ftd} & f \leq f_{t1} ; f \geq f_{t2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

SISTEMI LTI IN CASCATA O IN PARALLELO

SISTEMI LTI IN CASCATA

$$H(f) = H_1(f) H_2(f) \quad \text{in cascata}$$

SISTEMI LTI IN PARALLELO

$$H(f) = H_1(f) + H_2(f) \quad \text{in parallelo}$$

RISPOSTA DI UN SISTEMA LTI AD UN SINUSOIDE

$$\begin{aligned} V_y &= V_x |H(f)| \\ \varphi_y &= \varphi_x + B(f) \end{aligned}$$

$$|H(f)| = V_y / V_x$$

$$B(f) = \varphi_y - \varphi_x$$

GUADAGNO DI UN SISTEMA LTI

$$G = \frac{P_y}{P_x} = |H(f)|^2 \quad \text{in regime sinusoidale}$$

ATTENUAZIONE DI UN SISTEMA LTI

$$A = \frac{P_x}{P_y} = 1/G \quad \text{in regime sinusoidale}$$

PROCESSI ALEATORI

MEDIE DI UN PROCESSO ALEATORIO

$$\overline{X(t)} = E [x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi p_x(\xi, t) d\xi$$

VARIANZA DI UN PROCESSO ALEATORIO

$$\sigma_x^2 = E [(x(t) - \overline{x(t)})^2] = E [x^2(t)] - \overline{x(t)}^2$$

FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE DI UN PROCESSO ALEATORIO

Da un processo aleatorio $V(t)$, definisco la funzione di autocorrelazione come

$$C_v(t_1, t_2) = E[v(t_1) v(t_2)] \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_1 v_2 p_v(v_1, t_1; v_2, t_2) dv_1 dv_2$$

$$\text{dove } v_1 = v(t_1) \\ v_2 = v(t_2)$$

FUNZIONE DI CROSSCORRELAZIONE DI DUE PROCESSI ALEATORI

Dati due processi aleatori $v(t)$ e $w(t)$ si definisce la funzione di crosscorrelazione come

$$C_{v,w}(t_1, t_2) = E [v(t_1) w(t_2)]$$

PROCESSI ALEATORI ERGODICI

proprietà dei processi aleatori erodici:

- 1) $E[X(t)] = \langle x_1(t) \rangle$
- 2) $E [X(t)^2] = \langle x_1(t)^2 \rangle = P_x$ (potenza)
- 3) $C_v(\tau) = R_v(\tau)$