

VALOR MEDIO
 $\langle v(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} v(t) dt$

• ENERGIA DI UN SEGNALE

$$E_v = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)^2 dt$$

• POTENZA ISTANTANEA

$$p_v(t) = v(t)^2$$

• POTENZA DEL SEGNALE

$$P_v = \langle p_v(t) \rangle = \langle v(t)^2 \rangle$$

• VALORE EFFICACE

$$V_{eff} = \sqrt{P_v}$$

SEGNALI PERIODICI

$$\langle v(t) \rangle = (1/T_0) \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} v(t) dt$$

SEGNALI PERIODICI: SVILUPPO DI FOURIER

$$v(t) = v(t + k \cdot T_0) \quad k, t$$

Se $v(t)$ è un segnale periodico allora può essere descritto mediante lo sviluppo in serie di Fourier:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{j2\pi n f_0 t}$$

SVILUPPO IN SERIE
DI FOURIER

$$c_n = (1/T_0) \int_{-T_0/2}^{T_0/2} v(t) \cdot e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

coefficiente dello
sviluppo in serie di Fourier

il segnale periodico può essere espresso come:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| \cdot e^{j(2\pi n f_0 t + \arg c_n)}$$

PROPRIETA'

1) $c_0 = \langle v(t) \rangle$ valore medio temporale del segnale

2) se $v(t)$ $c_{-n} = c_n^*$

3) se $v(t)$ $v(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2 |c_n| \cos(2\pi n \cdot f_0 t + \arg c_n)$

TEOREMA DI PARSEVAL (PER SEGNALI PERIODICI)

$$P_v = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

SEGNALI AD ENERGIA FINITA: TRASFORMATA DI FOURIER

$$\{v(t)\} = V(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

ANTITRASFORMATA DI FOURIER

$$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(f) e^{+j2\pi f t} df$$

PROPRIETA' FONDAMENTALI TRASFORMATA DI FOURIER

1) $V(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{j0} dt$

2) se $v(t)$ è reale $V(-f) = V(f)^*$

3) se $v(t)$ è reale $v(t) = 2 \int_0^{+\infty} |V(f)| \cos(2\pi f t + \arg(V(f))) df$

TEOREMA DI PARSEVAL (PER SEGNALI A ENERGIA FINITA)

Dati due segnali $v(t)$ e $w(t)$ entrambi a energia finita, allora:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \cdot w(t)^* dt = \int_{-\infty}^{+\infty} V(f) \cdot W(f)^* df$$

TEOREMA DI RAYLEICH

$$E_v = \int_{-\infty}^{+\infty} |V(f)|^2 df$$

PROPRIETA' TRASFORMATA DI FOURIER

1) proprietà della somma

$$v(t) = a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t) \quad \text{con } a_1, a_2 \text{ costanti}$$

$$V(f) = a_1 V_1(f) + a_2 V_2(f)$$

$$4) |R_v(\tau)| \leq P_v = R_v(0)$$

DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA

$$W_v^d(f) = \{R_v(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_v(\tau) e^{-j2\pi f\tau} dt$$

PROPRIETA' DELLA DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA

1) Proprietà fondamentale

$$\int_{\Delta f} W_v^d(f) = P_v$$

2) $P_v = \int_{-\infty}^{+\infty} W_v^d(f)$

3) $W_v^d(f)$ è non negativa

4) se $v(t) \rightarrow W_v^d(f)$ è reale e pari

DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA MONOLATERA

$$S_v^d(f) = \begin{cases} 0 & f < 0 \\ 2 \cdot W_v^d(f) & f \geq 0 \end{cases}$$

PROPRIETA'

1) $P_v = \int_{-\infty}^{+\infty} S_v^d(f) df$

BANDA IMPEGNATA DA UN SEGNALE IN UN SISTEMA

$$H(f) = \frac{y(t)}{x(t)} \text{ in regime fasoriale}$$

MODI PER RICAIVARE L'USCITA noto l'ingresso

1) $\underline{x(t)}$ FASORE $x(t) = A_x e^{j(2\pi f t + \phi_x)}$

$y(t) = H(f) x(t)$

2) $\underline{x(t)}$ SEGNALE PERIODICO

$C_{yn} = C_{xn} H(nf_0)$

3) $\underline{x(t)}$ SEGNALE A ENERGIA FINITA

$Y(f) = X(f) H(f)$

4) $\underline{x(t)}$ SEGNALE A POTENZA FINITA APERIODICO

$W_y^d(f) = W_x^d(f) |H(f)|^2$

FUNZIONI DI TRASFERIMENTO DI SISTEMI LTI

1) AMPLIFICATORE

$H(f) = G_0$

2) RITARDATORE

$H(f) = e^{-j2\pi f t_d}$

3) DERIVATORE

$H(f) = j2\pi f$

4) INTEGRATORE

$H(f) = -j / 2\pi f$

PROPRIETA' DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

1) se un sistema LTI è reale, la sua $H(f)$ gode di simmetria hermitiana

LTI reale $\Rightarrow H(-f) = H^*(f)$

DISTORSIONE DI UN SEGNALE

$y(t)$ è una replica non distorta di $x(t)$ se

$y(t) = T_0 x(t - t_0)$ per un qualche valore di T_0 e t_0

• le condizioni di non distorsione applicate al sistema LTI richiedono che $H(f)$ sia del tipo

$H(f) = T_0 e^{-j2\pi f t_d}$ solo per le frequenze appartenenti alla banda del segnale di ingresso

$H(f) = T_0 e^{-j2\pi f t_d} \quad f \in B_x$

FILTRI

FILTRI IDEALI

1) FILTRO PASSABANDA IDEALE

$T_0 e^{-j2\pi f t_d} \quad f_0 - B/2 < f < f_0 + B/2$

$H(f) = 0$ altrove

2) FILTRO PASSABASSO IDEALE

$T_0 e^{-j2\pi f t_d} \quad 0 \leq f < B$

$H(f) = 0$ altrove

3) FILTRO IDEALE PASSA ALTO

$$H(f) = \begin{cases} T_0 e^{-j2\pi f t_d} & f \geq f_c \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

4) FILTRO ELIMINA BANDA

$$H(f) = \begin{cases} T_0 e^{-j2\pi f t_d} & f \leq f_{d1} ; f \geq f_{d2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

SISTEMI LTI IN CASCATA O IN PARALLELO

SISTEMI LTI IN CASCATA
 $H(f) = H_1(f) H_2(f)$ in cascata
 SISTEMI LTI IN PARALLELO
 $H(f) = H_1(f) + H_2(f)$ in parallelo

GUADAGNO DI UN SISTEMA LTI

$$G = \frac{P_y / P_x}{|H(f)|^2} \quad \text{in regime sinusoidale}$$

ATTENUAZIONE DI UN SISTEMA LTI

$$A = \frac{P_x / P_y}{1/G} \quad \text{in regime sinusoidale}$$

PROCESSI ALEATORI
MEDIE DI UN PROCESSO ALEATORIO

$$\overline{X}(t) = E [x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi p_x(\xi, t) d\xi$$

VARIANZA DI UN PROCESSO ALEATORIO

$$\sigma_x^2 = E [(x(t) - \overline{x}(t))^2] = E [x^2(t)] - \overline{x}^2(t)$$

FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE DI UN PROCESSO ALEATORIO

Da un processo aleatorio $V(t)$, definisco la funzione di autocorrelazione come

$$C_v(t_1, t_2) = E [v(t_1) v(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} v_1 v_2 p_v(v_1, t_1; v_2, t_2) dv_1 dv_2$$

FUNZIONE DI CROSSCORRELAZIONE DI DUE PROCESSI ALEATORI

Dati due processi aleatori $v(t)$ e $w(t)$ si definisce la funzione di crosscorrelazione come

$$C_{v,w}(t_1, t_2) = E [v(t_1) w(t_2)]$$

PROCESSI ALEATORI STAZIONARI

Un processo aleatorio si dice stazionario in senso stretto se tutte le sue caratteristiche statiche non dipendono dal tempo

Se $x(t)$ è un processo aleatorio stazionario allora:

$$E [x(t)] = m$$

$$C_v(t, t - \tau) = C_v(\tau)$$

$$p_x(\xi, t) = p_x(\xi)$$

PROCESSI ALEATORI ERGODICI

proprietà dei processi aleatori ergodici:

1) $E[X(t)] = \langle x_1(t) \rangle$

2) $E [X(t)^2] = \langle x_1(t)^2 \rangle = P_x$ (potenza)

3) $C_v(\tau) = R_v(\tau)$

per un processo aleatorio ergodico invece per ogni realizzazione otteniamo un unico spettro, lo SPETTRO DEL PROCESSO ALEATORIO in quanto

riesco a definire $W_v(f)$

$$W_v(f) = \{C_v(\tau)\} = \{R_v(\tau)\}$$

Se un processo aleatorio ergodico $x(t)$ entra in un sistema LTI con una certa funzione di trasferimento $H(f)$, anche l'uscita $y(t)$ del sistema sarà un

processo aleatorio ergodico

$$W_y(f) = W_x(f) |H(f)|^2$$

$$y(t) = x(t) H(0)$$

PROPRIETA' DELLA DENSITA' SPETTRALE DI POTENZA

$v_1(t)$ e $v_2(t)$ sono processi aleatori ergodici di valor medio nullo

- 1) proprietà della somma
 se $v_1(t)$ e $v_2(t)$ sono incorrelati
 e $v(t) = a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t)$
 allora
 $W_v(f) = a_1^2 W_{v_1}(f) + a_2^2 W_{v_2}(f)$
- 2) proprietà della modulazione
 se $v(t) = v_1(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$

$$W_v(f) = \frac{1}{4} W_{v1}(f - f_0) + \frac{1}{4} W_{v2}(f + f_0)$$

FUNZIONE ERRORE COMPLEMENTARE

• $x \sim N(0, \frac{1}{2})$

definiamo $\text{erfc}(x_0)$ come

$$\begin{aligned} \text{erfc}(x_0) \quad P_r \{ |x| > x_0 \} &= 2 \int_{x_0}^{+\infty} p_x(\xi) d\xi \\ &= 2/\sqrt{\pi} \int_{x_0}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi \end{aligned}$$

- $P_r \{x > x_0\} = \frac{1}{2} \text{erfc}(x_0)$
- $P_r \{x < -x_0\} = \frac{1}{2} \text{erfc}(x_0)$
- $P_r \{x > x_0\} = 1 - \frac{1}{2} \text{erfc}(x_0)$
- $P_r \{x < -x_0\} = \frac{1}{2} \text{erfc}(x_0)$
- $y \sim N(m, \sigma^2)$
- $P_r \{y > y_0\} = \frac{1}{2} \text{erfc}((y_0 - m)/\sqrt{2} \sigma)$
- $P_r \{y < -y_0\} = \frac{1}{2} \text{erfc}((y_0 - m)/\sqrt{2} \sigma)$