KP01

n oggetti
p_j profitto dell'oggetto $\quad j = 1, \dots, n$
w_j peso dell'oggetto $\quad j = 1, \dots, n$

un contenitore con capacità k

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se oggetto j inserito nel contenitore} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1) $\max z = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$

2) $\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq k$

3) $x_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, n$

RILASSAMENTI

- *surrogato*: impossibile

- *eliminazione*: upper bound ovvio $\sum_j p_j$

- *lagrangiano*: un solo moltiplicatore $\lambda \geq 0$

$$z = \lambda k + \max \sum_{j=1}^{n} \overline{p_j}\, x_j \qquad \overline{p_j} = p_j - \lambda w_j$$

$$x_j \in \{0, 1\} \qquad j = 1, \dots, n$$

soluzione:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se } \overline{p_j} > 0 \\ 0 & \text{se } \overline{p_j} \leq 0 \end{cases}$$

- *continuo*: $x_j \in [0, 1] \quad j = 1, \dots, n$

GREEDY

1_ Inizializza:
$S = 0$
$\bar{k} = k$

2_ se $w_j > \bar{k}$ per ogni j □ S, STOP;

3_ tra gli oggetti j non appartenenti ad S con $w_j \le \bar{k}$ determina quello con rapporto p_j / w_j massimo e poni
$S := S \cup \{ j \}$,
$k = k - w_j$.

vai a 2

GREEDY DEL RILASSAMENTO CONTINUO
BRANCH AND BOUND

$$s = \min \{ i : \sum_{j=1}^{i} w_j > k \}$$

$$k^* = k - \sum_{j=1}^{s-1} w_j$$

$$U = \left\lfloor \sum_{j=1}^{s-1} p_j + k^* (p_s/w_s) \right\rfloor$$

RICERCA LOCALE

1_ Poni la soluzione corrente S uguale alla soluzione di partenza;

2_ Considera tutte le soluzioni ammissibili nella forma:
S U { j } con j □ S
S U { j } \ { i } con j □ S, i □ S

indicando con R la migliore di queste soluzioni;

3_ se $\sum_{j □ R} p_j \le \sum_{j □ S} p_j$ STOP

4_ poni S = R e vai a 2

KP-bounded

oggetto j disponibile in c_j esemplari $j = 1, \dots, n$

x_j numero di esemplari scelti dell'oggetto j $j = 1, \dots, n$

1) $\max z = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$

2) $\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \le k$

3) $0 \le x_j \le c_j$ intere $j = 1, \dots, n$

- si può trasformare il KP-bounded in KP01 aumentando il numero delle variabili decisionali fino a

  $$\sum_{j=1}^{n} c_j$$

  e ponendole binarie con il significato di considerare o meno un dato esemplare dell'elemento j

- il suo rilassamento continuo può essere risolto modificando opportunamente l'algoritmo di Dantzig del KP01:

  ordina gli oggetti j per p_j/w_j decrescenti con $j = 1, \dots, n$

  $s = \min \{i: \sum_{j=1}^{i} c_j w_j > k \}$

  per $j = 1, \dots, s - 1$ poni $x_j = c_j$

  $x_s = (k - \sum_{j=1}^{s-1} c_j w_j) / w_j$

  per $j = s + 1, \dots, n$ poni $x_j = 0$

SUBSET SUM PROBLEM (VARIANTE KP01)

Oggetto j ha profitto p_j e peso w_j con $p_j = w_j$

1) $\max z = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$

2) $\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leq k$

3) $x_j \in \{0, 1\}$ $\quad j = 1, \ldots, n$

MKP01

n oggetti
p_j profitto dell'oggetto j $\quad j = 1, \ldots, n$
w_j peso dell'oggetto j $\quad j = 1, \ldots, n$

m contenitori ciascuno con capacità k_i $\quad i = 1, \ldots, m$

ogni oggetto può andare in un solo contenitore

$$x_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se oggetto j è inserito nel contenitore i} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \begin{array}{l} j = 1, \ldots, n \\ i = 1, \ldots, m \end{array}$$

1) $\max z = \sum_{j=1}^{n} p_j \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \right)$

2) $\sum_{j=1}^{n} w_j x_{ij} \leq k_i$ $\quad i = 1, \ldots, m$

3) $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq 1$ $\quad j = 1, \ldots, n$

4) $x_{ij} \in \{0, 1\}$ $\quad j = 1, \ldots, n$
$\quad i = 1, \ldots, m$

RILASSAMENTO SURROGATO DEI VINCOLI DI CAPACITA'

1) $\max z = \sum_{j=1}^{n} p_j \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \right)$

2) $\sum_{i=1}^{m} \pi_i \sum_{j=1}^{n} w_j x_{ij} \leq \sum_{i=1}^{m} \pi_i k_i \qquad \pi_i \geq 0$

3) $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq 1 \qquad j = 1, \dots, n$

4) $x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad j = 1, \dots, n$
$i = 1, \dots, m$

interpretazione:

abbiamo un unico contenitore di capacità
per ogni oggetto j (con m copie disponibili) possiamo inserire una sola copia
conviene inserire la copia i t.c. π_i è minimo

i moltiplicatori surrogati che forniscono l'uper bound più basso sono $\pi_i = 1$ con $i = 1, \dots, m$

s (MKP01(1, …, 1)) = KP01

RILASSAMENTO LAGRANGIANO DEI VINCOLI DI ASSEGNAZIONE

1) $\max z = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j + \max \sum_{j=1}^{n} p_j^* \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \right)$

$p_j^* = p_j - \lambda_j$

2) $\sum_{j=1}^{n} w_j x_{ij} \leq k_i \qquad i = 1, \dots, m$

3) $x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad j = 1, \dots, n$
$i = 1, \dots, m$

interpretazione:

ogni oggetto j ha profitto p_j^* e peso w_j e può essere inserito anche in più di un contenitore, quindi si hanno m KP01 indipendenti

BIN PACKING

n oggetti
w_j peso dell'oggetto j con j =1, …, n
m bin con capacità k

$$x_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se oggetto j inserito nel bin i} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \begin{matrix} j = 1, \ldots, n \\ i = 1, \ldots, m \end{matrix}$$

$$y_i \begin{cases} 1 & \text{se il bin i viene utilizzato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, m$$

1) $$\min z = \sum_{i=1}^{m} y_i$$

2) $$\sum_{j=1}^{n} w_j x_{ij} \leq k y_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

3) $$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, \ldots, n$$

4) $y_i \in \{0, 1\}$ $\quad i = 1, \ldots, m$
$x_{ij} \in \{0, 1\}$ $\quad i = 1, \ldots, m$
$\quad j = 1, \ldots, n$

GREEDY (upper bound)

1_ Inizializzazione
z = 0 (numero bin utilizzati)
N = {1, …, n}

2_ N = 0 STOP

3_ ordina gli oggetti j ∈ N per valori decrescenti di w_j

per j = 1, … , n cerca un bin i* inizializzato che può contenere l'oggetto j

se esiste i* inserisci j nel bin i* altrimenti inizializza un nuovo bin, z++

LOWER BOUND

$$z^* \geq \sum_{j=1}^{n} w_j / k$$

<u>variante</u>

2) $\sum_{j=1}^{n} w_j x_{ij} \leq k y_i$ $i = 1, \ldots, m$ (vincolo di peso)

3) $\sum_{j=1}^{n} v_j x_{ij} \leq c y_i$ $i = 1, \ldots, m$ (vincolo di volume)

$$LB = \max \left(\sum_{j=1}^{n} w_j / k \,;\, \sum_{j=1}^{n} v_j / c\right)$$

<u>SET COVERING</u> <u>(SCP)</u>

matrice binaria A con m righe e n colonne

se $a_{ij} = 1$ si dice che la colonna j copre la riga i

c_j costo della colonna j con $j = 1, \ldots, n$

$$x_j \begin{cases} 1 & \text{se la colonna } j \text{ viene selezionata} \qquad j = 1, \ldots, n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1) $\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

2) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1$

3) x_j □ $\{0, 1\}$ per $j = 1, \ldots n$

RILASSAMENTO SURROGATO DI TUTTI I VINCOLI

$$S(SCP, \pi) \qquad \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{i=1}^{m} \pi_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq \sum_{i=1}^{m} \pi_i \qquad \text{con } \pi_i \geq 0 \text{ per ogni i}$$

$$x_j \in \{0, 1\} \qquad \text{per } j = 1, \dots n$$

<u>interpretazione</u>:

i vincoli di copertura sono sostituiti dall'unico vincolo

$$\sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} \pi_i a_{ij}) \; x_j \geq \sum_{i=1}^{m} \pi_i \; : \qquad \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \geq b$$

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} \pi_i a_{ij} \quad , \qquad b = \sum_{i=1}^{n} \pi_i$$

$S(SCP, \pi)$ è un problema KP01-Min: variante di KP01 dove:

- sono dati n oggetti
- il j-esimo oggetto ha un peso w_j e costo c_j
- si vuole determinare un sottoinsieme di oggetti di costo minimo e peso complessivo almeno pari a b

KP01-Min si può trasformare in KP01 (e viceversa) complementando le variabili decisionali ($x_j^* = 1 - x_j$)

RILASSAMENTO LAGRANGIANO DI TUTTI I VINCOLI

$$L(SCP, \lambda) \quad \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(1 - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \qquad \text{con } \lambda_i \geq 0 \text{ per ogni i}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i + \min \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_{ij} \qquad \text{con } \bar{c} = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \lambda_i$$

$$x_j \in \{0, 1\} \qquad \text{per } j = 1, \dots, n$$

interpretazione:

ogni colonna j ha costo

$$\bar{c}_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i$$

e non c'è alcun vincolo che leghi le variabili associate a colonne differenti

$$\Downarrow$$

$$\text{Soluzione: } x_j = \begin{cases} 1 \text{ se } \bar{c}_j \leq 0 \\ 0 \text{ se } \bar{c}_j \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad : z(L(SCP,\lambda)) = \sum_{\bar{c}_j<0} \bar{c}_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

GREEDY

1. Inizializzazione:
   S := 0 (colonne selezionate),
   M^* := {1, …, m} (righe non coperte dalle colonne selezionate);

2. M^* = 0 (se e solo se tutte le righe sono coperte), STOP;

3. Determina la colonna j ∉ S col rapporto

$$\frac{c_j}{\sum_{i \in M^*} a_{ij}}$$

   minimo e poni $S := S \cup \{j\}, M^* := M^* \setminus \{i : a_{ij}\}$. Vai a 2

{una colonna è buona se ha un costo basso e copre molte righe tra quelle scoperte }

RICERCA LOCALE

1. Poni la soluzione corrente S uguale alla soluzione di partenza (ad esempio determinata con uno dei precedenti algoritmi);

2. Considera tutte le soluzioni ammissibili delle forma:
   $S \setminus \{j\}$ (con j ∈ S)
   $S \setminus \{j\} \cup \{i\}$ (con j ∈ S, i ∉ S),
   indicando con R la migliore di queste soluzioni;

3. Se $\sum_{j \in R} C_j \geq \sum_{j \in S} c_j$, STOP (se e solo se "ottimo locale");

4. Poni S:= R e vai a 2

SET PARTITIONING (SPP)

Determinare un sottoinsieme di colonne avente costo minimo e tale che ogni rga sia coperta da esattamente una colonna selezionata

$$x_j \begin{cases} 1 & \text{se la colonna j viene selezionata} \qquad j = 1, \dots, n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1) $\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

2) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 1$

3) $x_j \in \{0, 1\}$ per $j = 1, \dots n$

PRODUZIONE E STOCCAGGIO

Pianificazione della produzione di un prodotti nell'arco di *n* mesi con costi di produzione e stoccaggio variabili

per ogni mese $i = 1,.., n$

d_i domanda mese i
m_i capacità della produzione del mese i
c_i costo di produzione unitario del mese i
r_i costo di stoccaggio unitario del mese i
s_0 quantità in magazzino ad inizio periodo

x_i quantità prodotta nel mese i
s_i quantità stoccata nel mese i

1) funzione obiettivo: $\min \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{i=1}^{n} r_i s_i$

2) di capacità $x_i \le m_i$ (i = 1,.., m)

3) di domanda $x_i + s_{i-1} - s_i = d_i$ (i = 1,.., m) $s_{i-1} - s_i$ quantità stoccata venduta

4) non negatività $x_i, s_i \ge 0$ (i = 1,.., m)

(il problema potrebbe essere anche di tipo PLI: in questo caso bisogna aggiungere il vincolo di interezza)

COSTI FISSI DI PRODUZIONE

Problema di mix di produzione

n prodotti
F_j costo fisso con $j = 1, \dots, n$
p_j costo di produzione con $j = 1, \dots, n$

x_j quantità prodotte dell'oggetto j

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se } x_j > 0 \\ 0 & \text{se } x_j = 0 \end{cases}$$

1) $\min z = \sum_{j=1}^{n} \left(F_j y_j + p_j x_j \right)$

2) $Ax \geq b$

3) $x_j \geq My_j$ con $M >> 1$ (□ $+ \infty$)

3) $x \geq 0$

4) $y \in \{0,1\}$

STIMA DI M_j

Per ogni prodotto j con $j=1, \dots, n$

$a_{ij}\, x_j \leq d_i$

$x_j \leq d_i / a_{ij}$ $(i = 1, \dots, m)$

$x_j \leq M_j = \min \{ d_i / a_{ij} : i = 1, \dots, m \}$

GREEDY

1_ for $j = 1, \dots, n : x_j = 0, y_j = 0, N = \{1, \dots, n\}$

for $i = 1, \dots, m : \bar{d}_i = d_i$

2_ for $j \in N$: $\overline{M_j} = \lfloor \min \{ d_i^* / a_{ij} \} \rfloor$

$\overline{p_j} = p_j M_j^* - F_j$

determina $j^* \in N$ t.c. $\overline{p_j^*} = \max \{ \overline{p_j} : j \in N \}$

if $\overline{p}_j^* \le 0$ then STOP

else $x_j^* = \overline{M_j^*}$, $y_j^* = 1$, N = N \ {j}

for i = 1, …, n : $\overline{d_i} = \overline{d_i} - \overline{M_j^*}\, a_{ij}^*$

vai al 2

(se serve rilassamento lagrangiano sul vincolo delle materie prime, vedi appunts)

SEQUENZIAMENTO DI LAVORAZIONE (SCHEDULING)

- *n* lavorazioni
- p_j tempo di processamento lavorazione *j*
- no preemption = una volta iniziata la lavorazione non può essere interrotta
- *m* macchine identiche una sola lavorazione alla volta per macchina

assegnare le lavorazioni alle macchine in modo tale che il tempo totale di processamento sia minimo

$$x_{ij} \begin{cases} 1 & \text{se la macchina } i \text{ esegue la lavorazione } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

z = massimo tempo di lavorazione

funzione obiettivo (min. make span): $\min z$

definizione make span: $\sum_{j=1}^{n} p_j x_{ij} \le z \qquad (i=1,\dots,m)$

obiettivo

(z sarà maggiore dei tempi di lavorazione (tdl) della macchina che non ha tdl massimi e uguale a quella che ha tdl massimi)

Ogni lavorazione su una sola macchina.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad (j=1,\dots,n)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad (j=1,\dots,n;\ i=1,\dots,m)$$

$$z \ge 0$$

vincoli