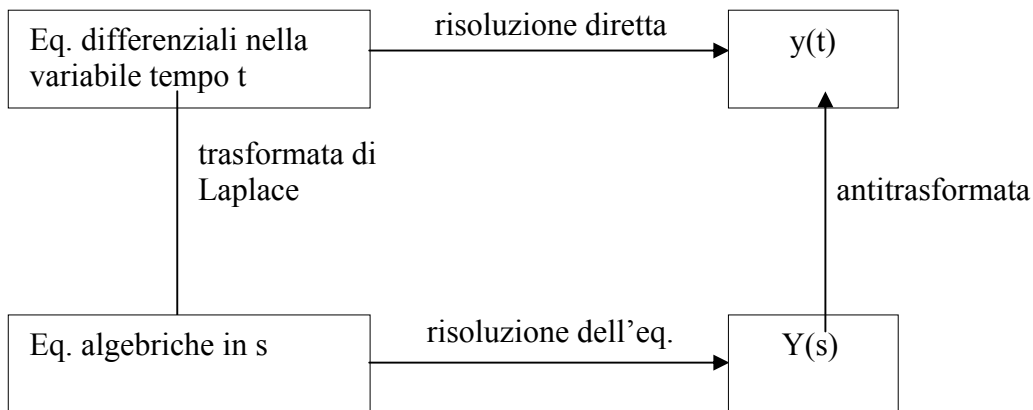


Equazioni differenziali

La risoluzione delle eq. differenziali si avvale di due metodi:

- 1) soluzione per via diretta
- 2) soluzione per mezzo di trasformate



Trasformata di Laplace

La *trasformata* è un algoritmo matematico che associa ad una funzione data in un certo dominio un'altra funzione in un altro dominio

Se $y(t)$ è una funzione reale della variabile reale t , definita per $t \geq 0$ e continua almeno a tratti (numero finito di punti di discontinuità) la sua *trasformata di Laplace*, se esiste, è la funzione di variabile complessa $Y(s)$ data dall'integrale:

$$\square [y(t)] \square \int_0^{\infty} e^{-st} y(t) dt = Y(s)$$

dove $s = \sigma + j\omega$
(inverso di un tempo)

l'*antitrasformata* vale

$$y(t) = \square^{-1} [Y(s)] = 1/2\pi j \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} e^{st} Y(s) ds$$

l'integrale è eseguito lungo una retta parallela all'asse immaginario di ascissa σ_0 appartenente al dominio di convergenza (insieme dei valori di σ che fanno convergere l'integrale)

σ_0 ascissa di convergenza

⇒ la trasformata di Laplace esiste solo se l'integrale della trasformata converge, il che accade solo se

- 1) per $t \rightarrow \infty$ $y(t)$ è di ordine esponenziale
- 2) $\sigma_0 < \text{Re}[s]$

Proprietà della trasformata di Laplace

1) la trasformata del prodotto di una costante k per una funzione $y(t)$ vale:

$$\square [(k y(t))] = k \square [y(t)]$$

2) la trasformata della somma algebrica di due o più funzioni vale :

$$\square [(y_1(t) + \dots + y_n(t))] = \square [y_1(t)] + \dots + \square [y_n(t)]$$

3) la trasformata della derivata prima di una funzione $y(t)$ vale :

$$\square [dy(t)/dt] = sY(s) - y(0^+)$$

4) la trasformata della derivata n -esima di una funzione $y(t)$ vale :

$$\square [d^n y(t)/dt^n] = s^n Y(s) - s^{n-1} y(0^+) - s^{n-2} |dy(t)/dt|_{t=0^+} - \dots - s |dy(t)^{n-2}/dt|_{t=0^+} - |dy(t)^{n-1}/dt|_{t=0^+}$$

5) la trasformata dell'integrale di una funzione $y(t)$ vale:

$$\square \left[\int_0^t y(t) dt \right] = Y(s)/s$$

6) la trasformata di una funzione $y(t)$ traslata nel tempo t_0 vale:

$$\square [y(t - t_0)] = e^{-st_0} Y(s)$$

⇒ Dalle proprietà 4) e 5) si deduce facilmente che le operazioni di derivazione e integrazione vengono trasformate in operazioni di tipo algebrico; conseguentemente si può dire che la trasformata di Laplace fa passare da relazioni di tipo integrale e differenziale a relazioni di tipo algebrico

TEOREMA (del valore finale)

Se la trasformata di Laplace $Y(s)$ della funzione $y(t)$ e quella della sua derivata prima esistono, vale:

Questi appunti sono disponibili gratuitamente su <http://spiff1281.altervista.org>

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s)$$

dove $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$, se esiste, è il cosiddetto valore finale della funzione $y(t)$

TABELLA DELLE TRASFORMATE PIU' COMUNI

Funzione del tempo $y(t)$	Trasformata di Laplace $Y(s)$
1) $\delta(t)$ (Impulso di Dirac in $t=0$)	1
2) $u(t)$ (gradino unitario in $t=0$)	$1/s$
3) $u(t-a)$ (gradino unitario in $t=a$)	$(1/s) (e^{-as})$
4) $t u(t)$ (rampa)	$1/s^2$
5) $(t^{n-1}) / (n-1)!$	$1/s^n$
6) e^{-at}	$1 / (s + a)$
7) $(1/a) (1 - e^{-at})$	$1 / [s (s + a)]$
8) $[(t^{n-1}) / (n-1)!] e^{-at}$	$1 / (s + a)^n$
9) $\text{sen}(\omega t)$	$\omega / (s^2 + \omega^2)$
10) $\text{cos}(\omega t)$	$s / (s^2 + \omega^2)$
11) $e^{-at} \text{sen}(\omega t)$	$\omega / [(s + a)^2 + \omega^2]$
12) $e^{-at} \text{cos}(\omega t)$	$(s + a) / [(s + a)^2 + \omega^2]$
13) $[(e^{-at} \text{sen}(\omega t + \varphi) / \omega) \sqrt{[(b-a)^2 + \omega^2]}]$ $\varphi = \arg(b - a + j\omega)$	$(s + b) / [(s + a)^2 + \omega^2]$

Es.

$$d^2 y(t) / dt^2 - 9y(t) = 2 e^{-2t} \quad \text{eq. differenziale}$$

Questi appunti sono disponibili gratuitamente su <http://spiff1281.altervista.org>

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= 1 \\ \left. \frac{d y(t)}{dt} \right|_{t=0} &= 1 \end{aligned} \right\} \text{condizioni iniziali}$$

$$\begin{aligned} \square \left[\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 9y(t) \right] &= \square \left[2 e^{-2t} \right] \\ \square \left[\frac{d^2 y(t)}{dt^2} \right] - 9 \square [y(t)] &= 2 \square [e^{-2t}] \\ s^2 Y(s) - s - 1 - 9 Y(s) &= 2 / (s + 2) \\ Y(s) [s^2 - 9] &= 1 + s + 2 / (s + 2) \\ Y(s) [s^2 - 9] &= (s^2 + 3s + 4) / (s + 2) \end{aligned}$$

$$Y(s) = (s^2 + 3s + 4) / (s + 2)(s + 3)(s - 3) \quad \text{trasformata di Laplace}$$

ANTITRASFORMAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

Il tipo di funzioni di cui è spesso richiesta l'antitrasformazione nella teoria dei sistemi e del controllo è quello delle funzioni razionali e fratte a coefficienti reali

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

nel caso di sistemi lineari e stazionari, questa funzione rappresenta sia la trasformata della funzione che dà l'evoluzione libera, sia la trasformata della funzione che dà l'evoluzione forzata per particolari funzioni in ingresso

- Se il grado del numeratore è inferiore a quello del denominatore, allora la funzione si può scomporre in una somma di rapporti elementari, detti fratti semplici, facilmente antitrasformabili

Indichiamo con z_1, z_2, \dots, z_m i poli (ossia le radici del polinomio a denominatore) e con p_1, p_2, \dots, p_n gli zeri (ossia le radici del polinomio a denominatore)

$$F(s) = K_1 / (s - p_1) + \dots + K_i / (s - p_i) + \dots + K_n / (s - p_n)$$

$$K_i = F(s) (s - p_i) \Big|_{s=p_i}$$

l'antitrasformata della funzione di partenza, sarà:

$$f(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{t p(i)}$$

Es. antitrasformazione dell'esercizio precedente

$$Y(s) = (s^2 + 3s + 4) / (s + 2)(s + 3)(s - 3)$$

$$Y(s) = K_1 / (s + 3) + K_2 / (s - 3) + K_3 (s + 2)$$

$$K_1 = \frac{(s^2 + 3s + 4)(s + 3)}{(s + 2)(s + 3)(s - 3)} \Big|_{s=-3} = 2/3$$

$$K_2 = \frac{(s^2 + 3s + 4)(s - 3)}{(s + 2)(s + 3)(s - 3)} \Big|_{s=3} = 11/15$$

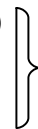
$$K_3 = \frac{(s^2 + 3s + 4)(s + 2)}{(s + 2)(s + 3)(s - 3)} = -2/5$$

$$Y(s) = 2 / [3 (s + 3)] + 11 / [15 (s - 3)] - 2 / [5 (s + 2)]$$

$$y(t) = e^{-3t} 2/3 + e^{3t} 11/15 - e^{-2t} 2/5$$

caratteristiche notevoli delle soluzioni :

- controllabilità (l'ingresso ne modifica il comportamento)
- osservabilità
- stabilità



caratteristiche strutturali
del sistema